



*Прийнято 13.05.2026. Прорецензовано 17.05.2026. Опубліковано 30.05.2026.*

УДК 123.45.678.9

DOI: 10.31471/1993-9868-2026-1(45)-72-91

## МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ПЛОЩІ МІДЕЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ І ПОВЕРХНІ ВТИСКАННЯ ДЕФОРМОВАНОЇ ДІЛЯНКИ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В СТІНКУ СВЕРДЛОВИНИ

### Гриджук Я. С. \*

Доктор технічних наук, професор  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу  
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-1429-8640>  
e-mail: jaroslav.gridzhuk@gmail.com

### Кондур О. С.

Доктор педагогічних наук, професор  
Карпатський національний університет імені Василя Стефаника  
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна  
<https://orcid.org/0000-0001-9342-1127>  
e-mail: oksana.kondur@cnu.edu.ua

### Слабий О. О.

Кандидат технічних наук, доцент  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу  
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-1274-2875>  
e-mail: burewisnyk@gmail.com

### Кондур Т. І.

Аспірант  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу  
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна  
<https://orcid.org/0009-0009-4629-030X>  
e-mail: kondur-a13322@nung.edu.ua

### Мохній І. Ю.

Аспірант  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу  
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна  
<https://orcid.org/0000-0003-3852-3934>  
e-mail: mox2308@gmail.com

---

Запропоноване посилання: Гриджук, Я. С., Кондур, О. С., Слабий, О. О., Кондур, Т. І. & Мохній, І. Ю. (2026). Модель оцінки площі мідельного перерізу і поверхні втискання деформованої ділянки бурильної колони в стінку свердловини. Нафтогазова енергетика, 1(45), 72-91. doi: 10.31471/1993-9868-2026-1(45)-72-91.

\* Відповідальний автор



Copyright © The Author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Анотація.** Стаття присвячена вирішенню актуальної науково-прикладної задачі нафтогазової інженерії – розробленню математичного інструментарію для точного визначення геометричних параметрів контакту бурильної колони зі стінками свердловини. У процесі спорудження глибоких похило-скерованих та горизонтальних свердловин бурильна колона під дією значних осьових та згинальних навантажень зазнає деформацій, що призводять до її локального втискання у фільтраційну кірку та гірську породу. Традиційні підходи, що базуються на точковому моделюванні контакту або наближених емпіричних залежностях, не дозволяють адекватно оцінити сили адгезійного прилипання та в'язкого опору, які суттєво впливають на енерговитрати та ефективність передачі осьової сили на долото. У роботі запропоновано інноваційну геометричну модель, де зону локального контактування прогнutoї ділянки БК представлено як частину поверхні тора, що вирізається круговим циліндром, який моделює ствол свердловини. Такий підхід дозволив врахувати складну криволінійність обох поверхонь. Використовуючи методи параметризації та аналізу особливих точок, автори встановили аналітичні залежності для визначення координат межі перетину та сформували інтегральні рівняння для обчислення площі поверхні втискання та площі мідельного перерізу. Оскільки отримані інтеграли не виражаються в елементарних функціях, для їх реалізації застосовано чисельний метод Сімпсона, втілений у програмних кодах мови Python та програмного середовища Maple. Проведене чисельне моделювання для різних трубних ділянок колтбурингових гнучких труб (КГТ), ділянки бурильних труб (БТ) та ділянки обважнених бурильних труб (ОБТ) виявило важливі закономірності: встановлено, що площа контакту на 2–3 порядки перевищує площу мідельного перерізу. Доведено, що при збільшенні глибини втискання у 5 разів площа міделя зростає приблизно у 9 разів, що свідчить про критичне зростання гідродинамічного опору. Для випадків малих деформацій авторами запропоновано спрощені параболічні формули, що полегшує практичні інженерні розрахунки. Результати дослідження є базою для вдосконалення методик розрахунку сумарних сил опору руху БК та проектування профілів свердловин із великими зенітними кутами, що дозволяє мінімізувати ризики виникнення прихоплень інструменту.

**Ключові слова:** бурильна колона, стінка свердловини, площа контакту, мідельний переріз, тор, циліндр, втискання, математичне моделювання, чисельні методи.

### Вступ

Перебуваючи під дією осьових, згинальних та крутих навантажень в процесі буріння бурильна колона (БК) зазнає суттєвих відхилень від осі свердловини, прогинів та деформацій. При бурінні похило-скерованих свердловин, профіль яких включає ділянки із значними зенітними кутами, на деформовані ділянки БК діють і значні сили опору поздовжньому руху, які впливають на можливість передачі осьової сили до долота. Особливий інтерес виявляють до себе сили в'язкого опору та адгезійного прилипання, що діють на зігнуті ділянки БК, які втиснуті у стінки свердловини, покриті фільтраційною кіркою. Зазначені сили залежать від площі мідельного перерізу і поверхонь контакту зігнутих ділянок БК із стінками свердловини. Внаслідок великої протяжності БК та великої кількості точок її контакту із стінками свердловини, зазначені вище площі в сумі становлять значну величину. Важливим також є той момент, що величини цих площ і відповідних сил опору зростають при збільшенні стріли прогину і глибини втискання ділянок БК у стінки свердловини.

### Аналіз сучасних закордонних і вітчизняних досліджень та публікацій

В більшості випадків зігнуті ділянки БК впираючись у стінки свердловини, протискають її фільтраційну кірку і зминають поверхневі шари гірської породи. Це призводить до

утворення жолобів. При втисканні зігнутої БК в стінки свердловини виникають наступні сили опору: сила нормального тиску, сила тертя ковзання, сили пружної деформації, сили гідродинамічного опору, сили адгезійного прилипання. Спочатку проведемо аналіз досліджень і публікацій, присвячених контактуванню зігнутих ділянок БК із стінками свердловини у середовищі бурового розчину.

У роботі [1] досліджено вплив каверн та жолобів на стійкість неорієнтованих компоновок низу бурильної колони (КНБК) та точність управління траєкторією свердловини. Автори проаналізували роботу КНБК з долотом діаметром 215,9 мм при зенітних кутах 10°, 30° та 45°, враховуючи зміну радіальних зазорів через дефекти стінок. Дослідження показали, що збільшення глибини каверни від 5 до 15 мм призводить до суттєвого падіння відхиляючого зусилля на долоті, що значно погіршує керованість інструменту. Встановлено, що найбільш критичний вплив кавернозності проявляється для конструкцій, де опорно-центрувальні елементи розміщені на відстані 2–3 м від вибою.

Розробленню узагальненої методики розрахунку енергетичних витрат для неорієнтованих КНБК, що враховує процеси ерозійного руйнування стінок свердловини під час обертання та осьового переміщення присвячена робота [2]. Встановлено, що фрезкування породи лопатями опорно-центрувальних елементів (ОЦЕ) потребує збільшення енергії на обер-

тання у 2–8 разів, а встановлення кожного наступного центратора підвищує ці витрати ще на 6%. Доведено, що при зенітних кутах від  $1^\circ$  до  $75^\circ$  енерговитрати на осьове переміщення зростають у 1,3 рази для безопорних КНБК та до 6 разів для триопорних конструкцій. Дослідження також виявило, що защемлення в стовбурі ОЦЕ номінального діаметра (214–215,9 мм) призводить до зміни відхиляючого зусилля на долоті на понад 30 %, що суттєво впливає на точність управління траєкторією буріння.

У роботі [3] досліджено механізм утворення жолобних виробок на стінках свердловин під дією опорних торців замків бурильної колони за допомогою методу диференціальних рівнянь та задачі Герца. Автори класифікували ерозійні жолоби за глибиною: від 100–150 мм у м'яких породах до виробок у міцних породах, що не перевищують 30% діаметра замка. Встановлено, що використання сталевих бурильних труб (СБТ) призводить до зростання сил притискання до стінки у 2,5 рази порівняно з легкосплавними трубами (ЛБТ) при інтенсивності викривлення 4–8 град/100 м. Доведено, що контактні напруження та глибина заглиблення замка суттєво залежать від осьової сили розтягу та радіуса опорного торця, часто досягаючи границі міцності гірської породи.

Математичні моделі та аналітичні підходи до оцінки інертності вигнутих ділянок БК, виготовлених зі сталі, титану, алюмінію та склопластику розроблено у роботі [4]. Встановлено, що збільшення густини матеріалу у 2,25 рази призводить до зростання моменту інерції у 1,7 рази, а підвищення густини у середньому в 3,9 рази – у 2,4–3,2 рази. Доведено, що для малих деформацій з прогином менше 2,5 см доцільно застосовувати спрощені асимптотичні формули, тоді як при більших переміщеннях необхідні моделі з розподіленими параметрами. Отримані результати дозволяють точніше визначати сили контактної взаємодії зі стінками свердловини та енергетичні витрати під час буріння глибоких похило-скерованих і горизонтальних свердловин.

У роботі [5] представлена модель взаємодії бурильної колони довжиною 105,7 м із нелінійним потоком бурового розчину та стінками свердловини. Дослідження проводилося при швидкості обертання 12 рад/с, розглядаючи критичні сценарії з дисбалансом маси до 25% від радіуса інструментального з'єднання. Результати моделювання при перепадах тиску до 5 МПа показали, що буровий розчин ефективно гасить високочастотні коливання, проте

може збуджувати низькочастотні крутильні вібрації.

Моделювання взаємодії КНБК зі стінкою горизонтальної свердловин малого діаметра в середовищі бурового розчину проведено у роботі [6]. З використанням рекурсивного алгоритму в поєднанні із методом рухомих частинок встановлено, що буровий розчин знижує власні частоти бурильної колони на 20–25%, а розроблений алгоритм скорочує час обчислень на 59,3% порівняно з традиційними методами динамічного аналізу. Дослідження показало, що збільшення витрати до 1,2 л/с дозволяє знизити витрати енергії на обертання на 34,6%, проте в'язкість розчину не повинна перевищувати поріг  $2,5 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с для уникнення зростання енерговитрат. Автори встановили значення ( $n=0,15$ ) критичного коефіцієнту тертя для оптимального центрування колони, що є ключовим для запобігання асиметричному накопиченню шламу та забезпечення ефективного гідророзриву пласта.

У роботі [7] розроблено нелінійну динамічну модель БК, побудовану з використанням методу скінченних елементів. Встановлено, що збільшення кривизни стовбура з  $1^\circ$  до  $10^\circ$  на 30 м призводить до зростання опору тертю зі 125 кН до 170 кН, а підвищення швидкості обертання з 30 до 60 об/хв збільшує амплітуду латеральних вібрацій на 35%. Аналіз показав, що при коефіцієнті тертя 0,4 середній опір досягає 302 кН, причому тертя під час спуску (283 кН) суттєво перевищує показники при підйомі (225 кН) за умови високої кривизни ( $12^\circ/30$  м). Дослідження моменту тертя виявило, що при навантаженні на долото 10 кН його максимум становить 90 Н·м, тоді як при 70 кН діапазон коливань різко зростає до 2,1 кН·м. Для мінімізації зносу інструменту автори рекомендують підтримувати швидкість обертання в межах 30–50 об/хв та обмежувати осьове навантаження значенням 50 кН.

Чисельний метод аналізу динаміки гнучких бурильних труб, реалізований за допомогою просторових балкових елементів та методів Ньюмарка і Ньютона-Рафсона запропоновано у роботі [8]. Точність розробленої моделі підтверджена порівнянням із теоретичними розрахунками, де максимальна похибка склала менше 1%. Дослідження виявило, що найбільші сили контакту зосереджені біля вибою свердловини: між гнучкою та напрямною трубами вони сягають 19,97 кН (з піками до 44,42 кН), а між напрямною трубою та стінкою – 4,82 кН. Встановлено, що процес контактування має періодичний характер із циклом 1,5 с та триває

лістю кожного удару близько 1,27 с, що спричиняє інтенсивний знос та створює високий ризик руйнування з'єднань інструменту.

Робота [9] присвячена дослідженню механізму нестабільності стовбура свердловини через контакт із БК за допомогою нової математичної моделі, що базується на критерії руйнування Мора-Кулона. Встановлено, що при силі механічного контакту 5000 Н безпечна густина бурового розчину становить лише  $900 \text{ кг/м}^3$ , проте зниження цієї сили до 2500 Н дозволяє розширити безпечне технологічне вікно до меж  $900\text{--}1100 \text{ кг/м}^3$ . Розрахунки показали, що коефіцієнт нестабільності сягає пікового значення 0,229 при азимутальних кутах  $0^\circ$  та  $180^\circ$ , залишаючись при цьому мінімальним у стабільному діапазоні від  $75^\circ$  до  $105^\circ$ . Крім того, виявлено, що збільшення діаметра свердловини до 250 мм призводить до зростання показника нестабільності до 0,66, що підкреслює критичну залежність цілісності стінок від геометричних параметрів та сили притискання труб.

Особливого значення при дослідженні взаємодії зігнутих ділянок БК із стінками свердловини також мають форми жолобів та геометричні параметри поверхонь контактування. Тому далі проаналізуємо дослідження і публікації, які присвячені визначенню площ та форм контактування, а також розробці математичних та імітаційних моделей. В цьому спектрі досліджень великої уваги заслуговують дослідження, які присвячені моделюванню поверхонь, їх форм та площ, параметри яких відповідають умовам контактування вигнутих ділянок БК із стінками свердловини.

Комплексні методи математичного моделювання та візуалізації геометричних об'єктів за допомогою системи MATLAB представлено у роботі [10]. Структуровані дослідження охоплюють теми від теорії чисел і багатогранників до диференціальної геометрії та побудови складних сплайнових поверхонь. Практична частина досліджень включає опис понад 50 спеціальних функцій та алгоритми для обчислення математичних констант, тексти програм для генерації фрактальних кривих і проєкцій у евклідовому та гіперболічному просторах.

Робота [11] присвячена вирішенню задач перетину поверхонь раціональних поліноміальних параметричних типів, що є критично важливим для систем моделювання CAD та CAM. Автори проаналізувавши недоліки традиційних методів досліджень, для підвищення результативності запропонували використання інтервального розв'язувача звичайних дифере-

нціальних рівнянь, який гарантує знаходження всіх компонентів перетину. Ефективність підходу підтверджена розрахунками, де максимальна відносна похибка в просторі моделі склала 0,0187 для перетину тора з циліндром та лише 0,002 для дотичних патчів Безьє.

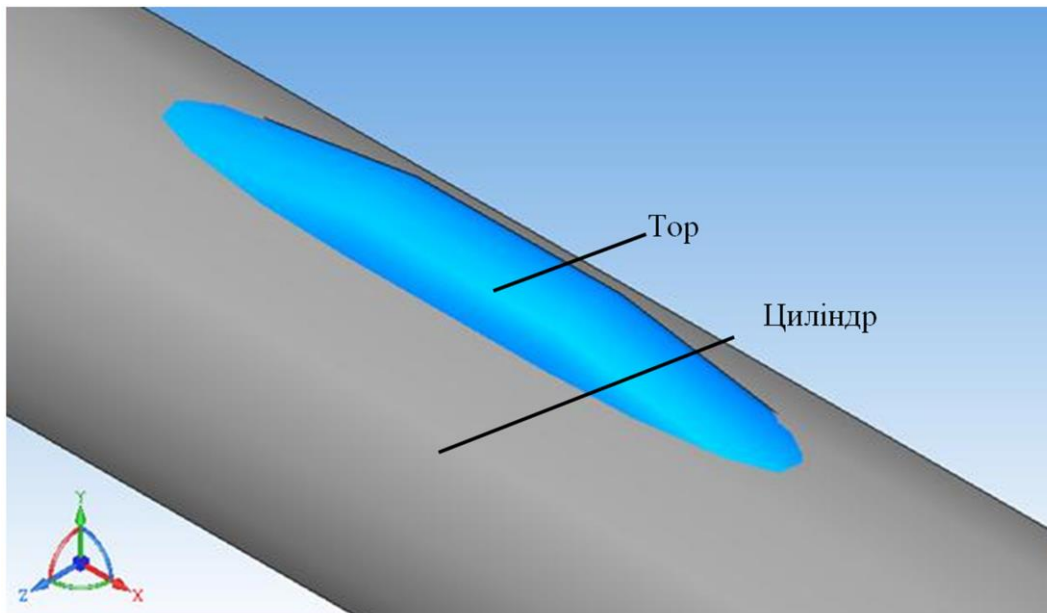
У роботі [12] представлено метод знаходження перетину алгебраїчних поверхонь другого порядку, реалізований за допомогою системи комп'ютерної алгебри GeoGebra. Запропонований підхід базується на апараті лінійної алгебри та аналізі коефіцієнтів рівняння, що складають матрицю розміром  $4 \times 4$ , яка визначає вид квадратичної поверхні. Автори провели тестування методу на складних прикладах, зокрема для нижчих та вищих порядків параметризації. Розробка дозволяє аналітично визначати рівняння кривих перетину, що є важливим для задач механіки твердих та деформованих тіл.

Робота [13] присвячена геометричному та алгебраїчному опису, а також топологічній класифікації кривих перетину тора з сімействами параболічних та еліптичних циліндрів у евклідовому просторі. Дослідження фокусується на визначенні кількості зв'язних компонент і точок самоперетину цих кривих залежно від геометричних параметрів поверхонь. Для отримання точних математичних результатів та візуалізації складних просторових конфігурацій автори поєднали можливості символічних обчислень Maple із графічним інструментарієм GeoGebra. Розроблений алгоритм базується на методі проєктування поверхонь та кривих, що забезпечує високу точність обчислень і має практичне значення для комп'ютерного моделювання, робототехніки та дослідження складних механічних систем.

Проведений аналіз досліджень свідчить, що взаємодія БК зі стінками свердловини критично впливає на енерговитрати та точність управління траєкторією буріння, проте існуючі методики часто обмежуються спрощеним точковим моделюванням контакту або наближеними емпіричними даними. Відсутність точного математичного опису геометрії взаємодії не дозволяє повноцінно врахувати фактичні сили опору та напруження, що виникають при деформації БК.

### **Висвітлення невирішених раніше частин загальної проблеми**

В загальному контексті проблем, які вирішувалися у розглянутих дослідженнях і стосувалися взаємодії БК з відкритим стовбуром свердловини у середовищі бурового розчину



**Рисунок 1 – Модельна поверхня зони контактування прогнутої ділянки БК, яка втиснута у стінку свердловини**

слід виділити способи оцінки геометричних параметрів поверхонь її ділянок, що втискаються у стінку свердловини. У більшості дослідженнях місця контакту моделювалися зосередженими точками. А у тих дослідженнях, які враховують контакт по поверхні, площу ж останньої пропонують визначати за наближеними емпіричними залежностями. Математичний інструментарій для більш точного розрахунку площі мідельного перерізу і поверхні втискання деформованої ділянки бурильної колони у стінку свердловини наданий час відсутній, а тому розроблення належних математичних моделей в цьому напрямі є актуальною.

#### **Мета та завдання досліджень**

Метою статті є розроблення математичної моделі для більш точного визначення геометричних параметрів контакту (площі мідельного перерізу та поверхні втискання) деформованої ділянки бурильної колони зі стінкою свердловини. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання досліджень:

- здійснити обґрунтування і вибір поверхонь тіл, що імітують ділянку БК і стінку свердловини в процесі втискання;
- встановити математичну функцію, що описуватиме поверхню взаємного вирізання;
- встановити залежності для визначення площі поверхні контакту і площі міделя;
- розробити програмні коди для реалізації математичної моделі засобами і методами чисельно-імітаційного моделювання.

#### **Висвітлення основного матеріалу дослідження**

Розглянемо процес втискання прогнутої півхвилі БК у стінку свердловини. Вважатимемо, що основою стінки свердловини є речовина з пружно-анізотропними властивостями, а її поверхня вкрита суцільною фільтраційною кіркою. При локальному торканні до в'язкої поверхні стінки свердловини БК продовжує втискатися в неї з подальшим утворенням жолобоподібної поверхні до того часу, коли максимальна реакція стінки стане рівною максимальній силі пружного втискання. При остаточному втисканні прогнутої ділянки колони в тверду основу стінки свердловини її реакція досягає максимального значення, а швидкість втискання при цьому стає рівною нулю. Результати аналізу напружено-деформованого стану деформованої ділянки БК [1, 2, 9] та процесу її втискання у стінку свердловини дають можливість сформулювати необхідні дані для постановки та розв'язку геометричної задачі про визначення площі зони їх взаємного контактування.

З достатньою для теорії і практики буріння точністю зону локального контактування прогнутої ділянки БК із стінкою свердловини можна змодельовати як частину поверхні тора, яка вирізається круговим циліндром [14, 15] (рис. 1). При цьому зовнішню поверхню ділянки БК, прогнутої у площині паралельній осі свердловини, можна ототожити з поверхнею ділянки тора, а внутрішню поверхню стінки свердловини – із поверхнею кругового цилінд-

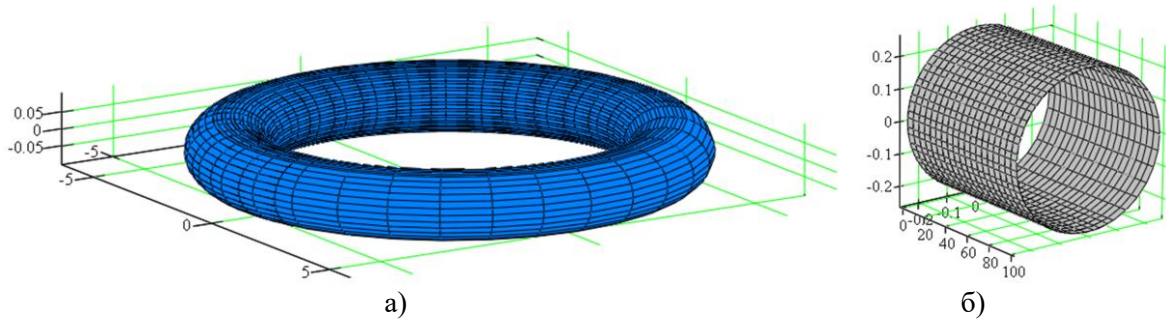


Рисунок 2 – Моделі поверхонь тора а) та кругового циліндра б)

ра [11-15]. Тоді визначення площі зони контактування можна звести до визначення площі поверхні взаємного перетину поверхонь тора і циліндра, відповідно четвертого та другого порядку (рис. 2).

Тор є геометричною фігурою, поверхня якої описується рівнянням четвертого порядку. Рівняння тора з радіусом твірного кола  $r$  і відстанню від центра цього кола до осі (центру) тора  $R$  задається у наступному вигляді:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0, \quad (1)$$

де  $r$  – радіус твірного кола;  $R$  – відстань від центру твірного кола до головної осі симетрії тора.

Циліндр є геометричною фігурою, поверхня якої описується рівнянням другого порядку. Для кругового циліндра з радіусом твірного кола  $\rho$  рівняння задається у такому вигляді:

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad (2)$$

де  $\rho$  – радіусом твірного кола циліндра.

Аналитичне моделювання взаємного перетину поверхонь перетину тора і циліндра є досить складною геометричною задачею [11-13] через те, що обидві поверхні є криволінійними. Оскільки тор є поверхнею четвертого порядку, а циліндр – другого, результуюча лінія перетину в загальному випадку описується рівнянням восьмого ступеня. В такий спосіб, аналітичне моделювання перетину тора й циліндра зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь високих порядків. Основне завдання – це визначення площі поверхні тора, яка “вирізається” поверхнею циліндра та площі поперечного перерізу “вирізаного” елемента тора.

При побудові математичної моделі визначення площі поверхні тора, яка “вирізається” поверхнею циліндра та площі поперечного перерізу “вирізаного” елемента тора застосуємо метод параметризації. Обраний метод є найефективнішим, оскільки можна представити одну з поверхонь у параметричному вигляді [12, 15]. Одночасно застосуємо метод аналізу

особливих точок: за допомогою похідних (градієнтів поверхонь) визначатимемо точки дотику або самоперетину кожної кривої; якщо градієнти обох поверхонь у точці колінеарні, то це свідчатиме про їх дотик [11-13].

Розташуємо головну вісь симетрії тора перпендикулярно головній осі симетрії циліндра таким чином, щоб поверхня тора випиналася на величину  $a$  відносно поверхні циліндра і проведемо січну площину (рис. 3). Введемо геометричні параметри моделі:  $\rho$  – радіусом твірного кола циліндра;  $r$  – радіус твірного кола;  $R = x_0, x_1$  – відстань від центру твірного кола до головної осі симетрії тора;  $\alpha$  – половина центрального кута сегмента твірного кола тора;  $\beta$  – половина центрального кута сегмента кола циліндра;  $L = O x_1$  – відстань між центром циліндра і центром поперечного перерізу тора;  $a$  – глибина втискання тора в циліндр;  $S_M$  – сегментна площа міделевого перерізу (площа міделя). Надалі зробимо припущення, що:

$$\rho \leq x_0 + R + r \leq \rho + a, \quad a = \frac{r}{2}. \quad (3)$$

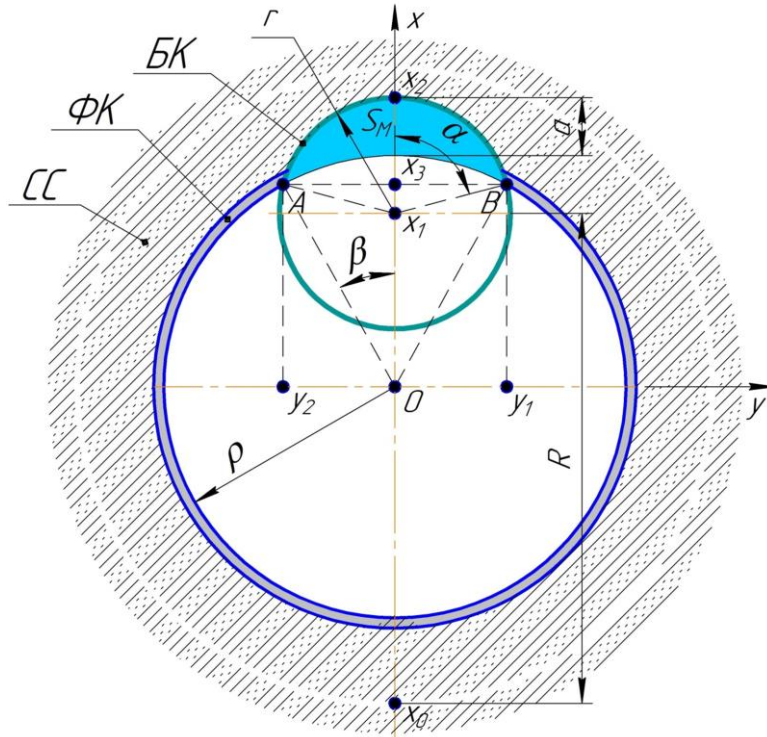
Вважатимемо, що головна вісь симетрії тора перетинатиме вісь  $Ox$  у точці з абсцисою  $x_0$ . Тоді з урахуванням (3) рівняння поверхні тора (1) перепишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \left( (x - x_0)^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 \right)^2 = \\ = 4R^2 \left( (x - x_0)^2 + z^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

а рівняння кола поперечного перерізу тора:

$$(x - (x_0 + R))^2 + y^2 = r^2. \quad (5)$$

З рис. 3 видно, що А і В – це точки перетину кола радіусом  $\rho$  циліндра, що моделює внутрішню поверхню стінки свердловини та кола радіусом  $r$ , що моделює твірну тора. Для визначення координат точок А і В складемо систему з рівнянь цих кіл:



СС – стінка свердловини; ФК – фільтраційна кірка; БК – бурильна колона  
**Рисунок 3 – Розрахункова схема поперечного перерізу тора “втиснутого” в циліндр**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2; \\ (x - (x_0 + R))^2 + y^2 = r^2. \end{cases} \quad (6)$$

Додавши обидва рівняння системи (6), приведемо отриманий вираз до наступного вигляду:

$$2x(x_0 + R) = \rho^2 - r^2 + (x_0 + R)^2,$$

звідки

$$x = x_3 = \frac{\rho^2 - r^2 + (x_0 + R)^2}{2(x_0 + R)}. \quad (7)$$

Після цього, підставивши (7) у перше рівняння системи (6), приведемо отриманий вираз до наступного вигляду:

$$y^2 = \rho^2 - x^2 = \rho^2 - \frac{\rho^2 - r^2 + (x_0 + R)^2}{2(x_0 + R)},$$

звідки

$$y_{1,2} = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\rho^2 - r^2 + (x_0 + R)^2}{2(x_0 + R)}\right)^2}. \quad (8)$$

В результаті проведених математичних процедур, отримали координати точок А і В (рис. 3): А(x<sub>3</sub>, y<sub>2</sub>) та В(x<sub>3</sub>, y<sub>1</sub>). Після цього виділимо область Q, яка в між точками А(x<sub>3</sub>, y<sub>2</sub>), В(x<sub>3</sub>, y<sub>1</sub>) та абсцисою x<sub>2</sub> буде обмежена дугами кіл радіусами ρ та r.

Надалі з рівняння тора (4) виразимо z, як функцію x і y та приведемо отриманий вираз до наступного вигляду:

$$z^4 + 2z^2((x - x_0)^2 + y^2 - (R^2 + r^2)) + ((x - x_0)^2 + y^2 + R^2 - r^2) - 4R^2(x - x_0)^2 = 0. \quad (9)$$

Знайдемо корені біквдратного рівняння (9):

$$z = \pm \sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2}, \quad (10)$$

Оскільки поверхня симетричною, то досить розглянути z ≥ 0, а отже рівняння поверхні, яка отримується в результаті взаємного вирізання тора циліндром прийме такий вигляд:

$$z = \sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2} = F(x; y). \quad (11)$$

Площу поверхні тора, яка “вирізається” поверхнею циліндра можемо визначити за відомою формулою визначення поверхонь у тривимірному просторі:

$$S_n = \iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (12)$$

Тепер знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2} \right] =$$

$$= -\frac{x - x_0}{\sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2}}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2} \right] =$$

$$= -\frac{y \left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2} \sqrt{r^2 - y^2}}. \quad (14)$$

Після цього з використанням часткових похідних (13) і (14) сформуємо підінтегральну функцію формули (12):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} =$$

$$= \frac{r \left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)}{\sqrt{\left[\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2\right] \left(r^2 - y^2\right)}}. \quad (15)$$

З урахуванням (7), (8) та (15) формула (12) набуде такого вигляду:

$$S_n = 2 \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2} + x_0 + R} \left\{ r \left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right) \times \right. \quad (16)$$

$$\left. \times \left[ \sqrt{\left[\left(\sqrt{r^2 - y^2} \pm R\right)^2 - (x - x_0)^2\right] \left(r^2 - y^2\right)} \right]^{-1/2} \right\} dx$$

Після низки математичних перетворень вираз (16) приведемо до наступного вигляду:

$$S_n = 2r \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - y^2} \pm R}{\sqrt{r^2 - y^2}} \times \right. \quad (17)$$

$$\left. \times \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{r^2 - y^2} + R}{\sqrt{r^2 - y^2} \pm R} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{r^2 - y^2} - x_0}{\sqrt{r^2 - y^2} \pm R} \right) \right] \right\} dy$$

Отриманий інтеграл (17) є досить складним для знаходження первісної в елементарних функціях. Тому остаточний розв'язок здійснюємо чисельним методом – методом Сімпсона. Для реалізації даного методу складено програму на мові Python та застосовано програмне середовище Maple (табл. 1, табл. 2).

Площу області  $S_M$ , як площу поперечного перерізу поверхні колони труб, що втиснута у жолоб фільтраційну кірку (мідель), виразимо

через радіуси поперечних перерізів циліндра  $\rho$  і твірного кола тора  $r$ :

$$S_M = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - \rho^2 (\beta - \sin \beta \cdot \cos \beta), \quad (18)$$

де  $\alpha$  – половина центрального кута сегмента твірного кола тора;

$\beta$  – половина центрального кута сегмента кола циліндра.

Кути  $\alpha$  і  $\beta$  визначаємо відповідно до рис. 3:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\rho^2 - L^2 - r^2}{2rL} \right); \quad (19)$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{\rho^2 + L^2 - r^2}{2\rho L} \right); \quad (20)$$

де  $L$  – відстань між центром поперечного перерізу циліндра і центром поперечного перерізу тора:

$$L = \rho - r + a. \quad (21)$$

Для практичних розрахунків у випадках, коли глибина втискання БК у стінку свердловини значно менша за радіуси ( $a \ll r, \rho$ ), формулу (18) можна спростити до наступного вигляду:

$$S_M = \frac{4}{3} a \sqrt{2R_{36} a}; \quad (22)$$

де  $R_{36}$  – зведений радіус,

$$R_{36} = \rho r (\rho - r). \quad (23)$$

Визначену площу поверхні тора  $S_n$ , яка “вирізається” поверхнею циліндра надалі можемо ототожнити з площею поверхні зігнутої труби, яка втискається у стінку свердловини і знаходиться у жолобній “виробці”, а площу частини поперечного перерізу тора, як “вирізаного” елемента (площу міделя)  $S_M$  – з площею частини поперечного перерізу цієї зігнутої труби, яка контактує із стінкою свердловини в межах “жолобу”. Використовуючи геометричні параметри колтюбінгових гнучких труб (КГТ), бурильних труб (БТ) та обважнених бурильних труб (ОБТ) із застосуванням встановлених залежностей (17) та (18) проведено обчислення зазначених площ для різних довжин півхвиль прогину  $L$  ділянок, а результати розрахунку зведено в таблиці 3, 4, 5, 6, 7. Графіки зміни площ мідельного перерізу та поверхонь контактування прогнаних ділянок ОБТ, БТ та КГТ наведені на рисунках 4, 5, 6, 7, 8, 9. Проведений аналіз графіків (рис. 4–9) та відповідних табличних даних проведених досліджень дозволяє зробити наступні висновки щодо динаміки зміни площ при втисканні ділянок БК у стінку свердловини.

**Таблиця 1 – Код програми на мові Python для чисельного інтегрування залежності (17) за методом Сімпсона**

Python
<pre> import numpy as np from scipy.integrate import quad  # Вкажіть ваші значення тут: r = 10.0 R = 5.0 x0 = 2.0 y1, y2 = 0, 5 # Межі інтегрування sign = 1 # 1 для '+', -1 для '-'  def integrand(y):     term_sqrt = np.sqrt(r**2 - y**2)     numerator = term_sqrt + (sign * R)      arg1 = (term_sqrt + R) / numerator     arg2 = (term_sqrt - x0) / numerator      # Перевірка області визначення arcsin (від -1 до 1)     if abs(arg1) &gt; 1 or abs(arg2) &gt; 1:         return 0      res = (numerator / term_sqrt) * (np.arcsin(arg1) - np.arcsin(arg2))     return res  integral_val, error = quad(integrand, y1, y2) S = 2 * r * integral_val  print(f"Результат S: {S}") </pre>

**Таблиця 2 – Код програмного середовища Maple для чисельного інтегрування залежності (17) за методом Сімпсона**

Maple
<pre> restart; # Очищення пам'яті with(Student[Calculus1]): # Завантаження пакету для чисельного аналізу  # --- 1. Введення констант (задайте власні значення) --- r := 10.0: # Радіус r R := 15.0: # Параметр R x0 := 2.0: # Параметр x0 y1 := -9.0: # Нижня межа інтегрування (має бути &gt; -r) y2 := 9.0: # Верхня межа інтегрування (має бути &lt; r) n := 100: # Кількість кроків розбиття (для методу Сімпсона має бути парним)  # --- 2. Визначення підінтегральної функції --- # Примітка: використовуємо знак "+" (якщо потрібно "-", змініть у формулі нижче) f := y -&gt; 2*r * ((sqrt(r^2 - y^2) + R) / sqrt(r^2 - y^2)) *     (arcsin((sqrt(r^2 - y^2) + R) / (sqrt(r^2 - y^2) + R)) -     arcsin((sqrt(r^2 - y^2) - x0) / (sqrt(r^2 - y^2) + R))); </pre>

## Продовження таблиці 2

```

# --- 3. Обчислення методом Сімпсона ---
# Команда ApproximateInt повертає наближене значення інтеграла
result_simpson := ApproximateInt(f(y), y = y1 .. y2, method = simpson, partition = n, output = value);

# --- 4. Точне чисельне значення для порівняння ---
# Використовуємо стандартний адаптивний метод Maple
result_exact := evalf(Int(f(y), y = y1 .. y2));

# --- 5. Виведення результатів ---
printf("Параметри: r=%g, R=%g, x0=%g\n", r, R, x0);
printf("Межі інтегрування: [%g, %g]\n", y1, y2);
printf("-----\n");
printf("Результат за методом Сімпсона (n=%d): %.10f\n", n, evalf(result_simpson));
printf("Точне чисельне значення (evalf/Int): %.10f\n", result_exact);
printf("Абсолютна похибка: %.10e\n", abs(evalf(result_simpson) - result_exact));

```

Таблиця 3 – Площі мідельного перерізу  $S_M$  прогнутих ділянок КГТ при їх втисканні у стінку свердловини

$a$	$L_{BT} = 20$ м		$L_{BT} = 40$ м	
	$d_{KGT} = 60,3$ мм 2 3/8"	$d_{KGT} = 66,7$ мм 2 5/8"	$d_{KGT} = 73,0$ мм 2 7/8"	$d_{KGT} = 88,9$ мм 3 1/2"
0,1r	0,000059	0,000073	0,000089	0,000136
0,2r	0,000164	0,000202	0,000245	0,000375
0,3r	0,000293	0,000363	0,000439	0,000668
0,4r	0,000441	0,000544	0,000658	0,001000
0,5r	0,000601	0,000742	0,000896	0,001357

Таблиця 4 – Площі мідельного перерізу  $S_M$  прогнутих ділянок БТ при їх втисканні у стінку свердловини

	$L_{BT} = 20$ м		$L_{BT} = 40$ м	
	$d_{BT} = 60,3$ мм	$d_{BT} = 73,0$ мм	$d_{BT} = 89,0$ мм	$d_{BT} = 101,6$ мм
0,1r	0.000059	0.000089	0.000137	0.000183
0,2r	0.000164	0.000245	0.000376	0.000502
0,3r	0.000293	0.000439	0.000670	0.000893
0,4r	0.000441	0.000658	0.001002	0.001331
0,5r	0.000601	0.000896	0.001360	0.001803
$a$	$L_{BT} = 60$ м		$L_{BT} = 80$ м	
	$d_{BT} = 114,3$ мм	$d_{BT} = 127,0$ мм	$d_{BT} = 139,7$ мм	$d_{BT} = 168,3$ мм
0,1r	0.000239	0.000304	0.000380	0.000599
0,2r	0.000651	0.000826	0.001029	0.001602
0,3r	0.001156	0.001461	0.001812	0.002793
0,4r	0.001719	0.002167	0.002679	0.004092
0,5r	0.002322	0.002919	0.003599	0.005456

**Таблиця 5 – Площі мідельного перерізу  $S_M$  прогнутих ділянок ОБТ при їх втисканні у стінку свердловини**

$L_{BT} = 20 \text{ м}$			$L_{BT} = 40 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 108 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 120 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 127 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 146 \text{ мм}$
0,1r	0.000210	0.000267	0.000304	0.000422
0,2r	0.000574	0.000727	0.000826	0.001141
0,3r	0.001020	0.001287	0.001461	0.002005
0,4r	0.001520	0.001913	0.002167	0.002958
0,5r	0.002055	0.002580	0.002919	0.003968
$L_{BT} = 60 \text{ м}$			$L_{BT} = 80 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 159 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 165 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 171 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 178 \text{ мм}$
0,1r	0.000520	0.000570	0.000624	0.000692
0,2r	0.001396	0.001527	0.001666	0.001840
0,3r	0.002443	0.002665	0.002901	0.003193
0,4r	0.003591	0.003909	0.004246	0.004663
0,5r	0.004800	0.005217	0.005657	0.006198
$L_{BT} = 60 \text{ м}$			$L_{BT} = 80 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 203 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 229 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 245 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 273 \text{ мм}$
0,1r	0.000986	0.001410	0.001761	0.002678
0,2r	0.002577	0.003588	0.004378	0.006226
0,3r	0.004413	0.006029	0.007246	0.009921
0,4r	0.006375	0.008588	0.010212	0.013645
0,5r	0.008403	0.011198	0.013210	0.017357

**Таблиця 6 – Площі поверхні контактування  $S_n$  прогнутих ділянок КГТ при їх втисканні у стінку свердловини**

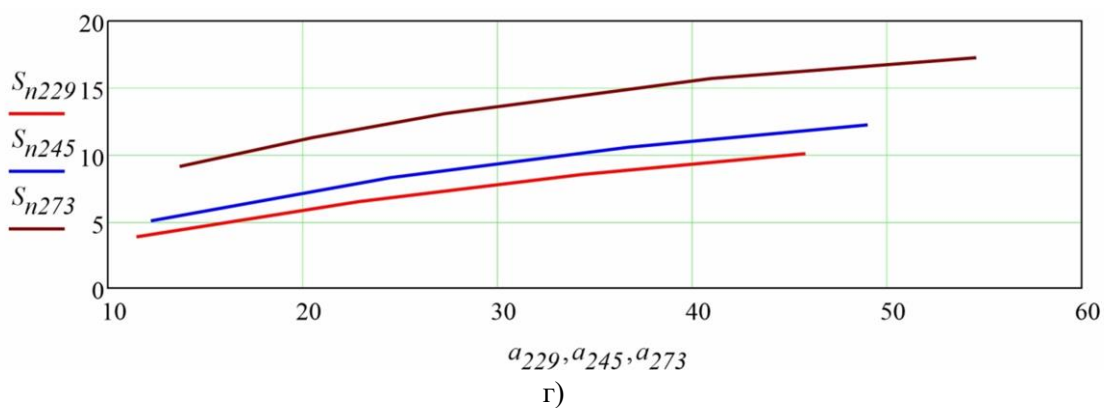
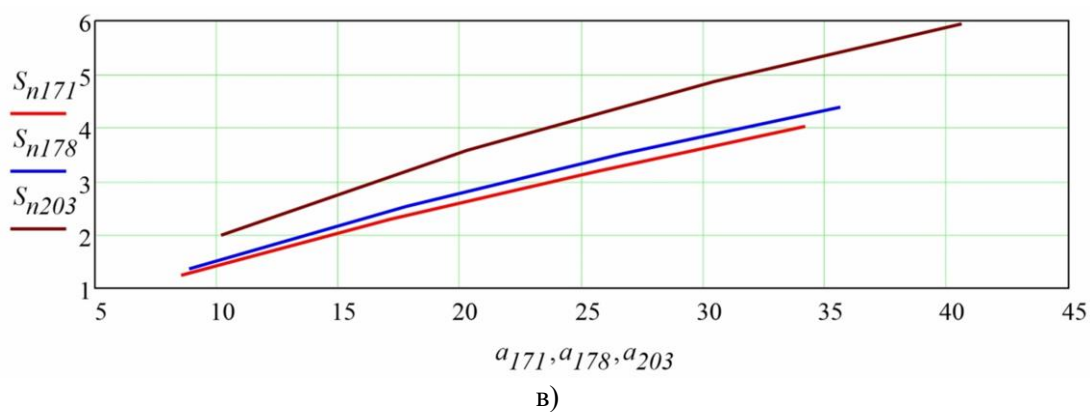
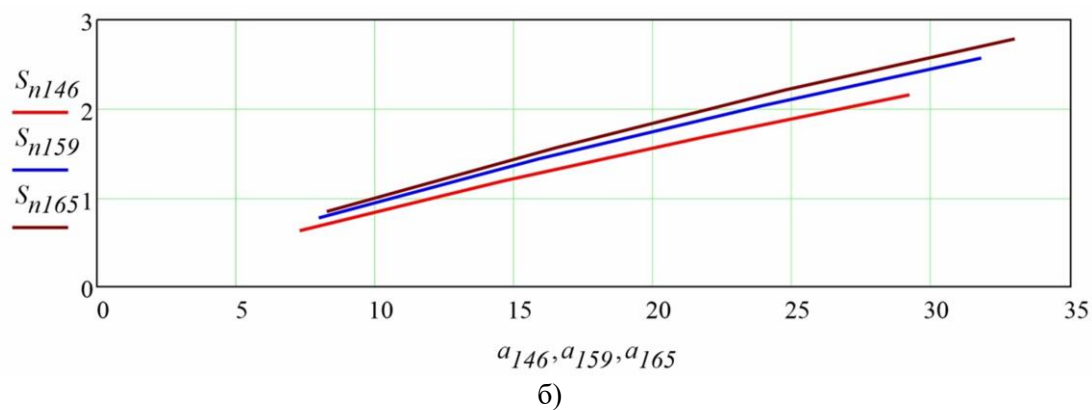
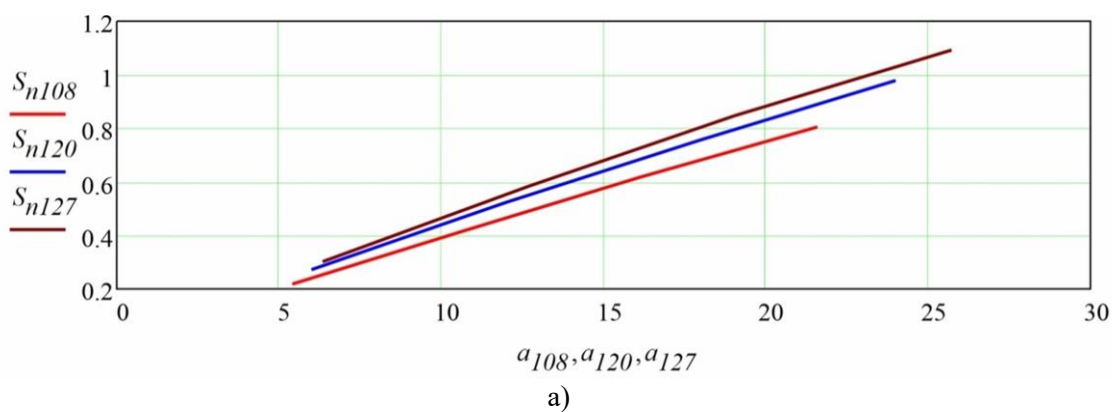
$L_{BT} = 20 \text{ м}$			$L_{BT} = 40 \text{ м}$	
$a$	$d_{KGT} = 60,3 \text{ мм}$ <b>2 3/8"</b>	$d_{KGT} = 66,7 \text{ мм}$ <b>2 5/8"</b>	$d_{KGT} = 73,0 \text{ мм}$ <b>2 7/8"</b>	$d_{KGT} = 88,9 \text{ мм}$ <b>3 1/2"</b>
0,1r	0,0744214	0,0892995	0,1041771	0,2996449
0,2r	0,1474269	0,1764327	0,2054385	0,5871047
0,3r	0,2191611	0,2616292	0,3040972	0,8638019
0,4r	0,2897696	0,3451016	0,4004335	1,1310382
0,5r	0,3593968	0,4270558	0,4947147	1,3898831

**Таблиця 7 – Площі поверхні контактування  $S_n$  прогнутих ділянок БТ при їх втисканні у стінку свердловини**

$L_{BT} = 20 \text{ м}$			$L_{BT} = 40 \text{ м}$	
$a$	$d_{BT} = 60,3 \text{ мм}$	$d_{BT} = 73,0 \text{ мм}$	$d_{BT} = 89,0 \text{ мм}$	$d_{BT} = 101,6 \text{ мм}$
0,1r	0,0744214	0,1041771	0,2996450	0,3862573
0,2r	0,1474269	0,2054385	0,5871048	0,7524572
0,3r	0,2191611	0,3040972	0,8638020	1,1012270
0,4r	0,2897696	0,4004335	1,1310391	1,4348431
0,5r	0,3593968	0,4947147	1,3898841	1,7552102
$L_{BT} = 60 \text{ м}$			$L_{BT} = 80 \text{ м}$	
$a$	$d_{BT} = 114,3 \text{ мм}$	$d_{BT} = 127,0 \text{ мм}$	$d_{BT} = 139,7 \text{ мм}$	$d_{BT} = 168,3 \text{ мм}$
0,1r	0,7332888	0,9142509	1,5031980	2,4250221
0,2r	1,4192302	1,7564502	2,8637972	4,3752020
0,3r	2,0647640	2,5386004	4,1087301	6,1525712
0,4r	2,6757951	3,2703822	5,2588007	7,7399098
0,5r	3,2570584	3,9594450	6,3299690	9,1780453

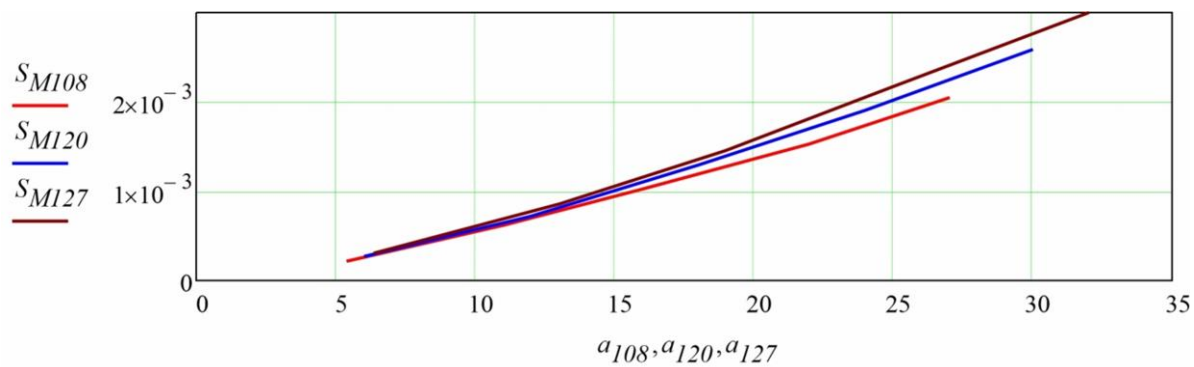
**Таблиця 8 – Площі поверхні контактування  $S_n$  прогнутих ділянок ОБТ при їх втисканні у стінку свердловини**

$L_{BT} = 20 \text{ м}$			$L_{BT} = 40 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 108 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 120 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 127 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 146 \text{ мм}$
0,1r	0,2179637	0,2703228	0,3047791	0,6235588
0,2r	0,4232701	0,5215256	0,5855499	1,1825200
0,3r	0,6176703	0,7565816	0,8463111	1,6898691
0,4r	0,8026567	0,9779289	1,0902700	2,1554040
0,5r	0,8032124	0,9794355	1,1013532	2,1612943
$L_{BT} = 60 \text{ м}$			$L_{BT} = 80 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 159 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 165 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 171 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 178 \text{ мм}$
0,1r	0,7643384	0,8383731	1,2253580	1,3633970
0,2r	1,4343100	1,5647530	2,2738040	2,5114312
0,3r	2,0314203	2,2061632	3,1905281	3,5028853
0,4r	2,5710020	2,7814526	4,0062190	4,3765890
0,5r	2,7180565	3,0169315	4,3765890	5,0156701
$L_{BT} = 60 \text{ м}$			$L_{BT} = 80 \text{ м}$	
$a$	$d_{OBT} = 203 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 229 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 245 \text{ мм}$	$d_{OBT} = 273 \text{ мм}$
0,1r	2,0006790	3,8059970	5,0518770	12,1900010
0,2r	3,5676220	6,4599841	8,2070390	13,0886535
0,3r	4,8509031	8,4734420	10,4537664	15,4726080
0,4r	5,9375110	10,0918810	12,1900010	17,1700820
0,5r	6,0157361	10,1014216	12,2015433	17,1869446

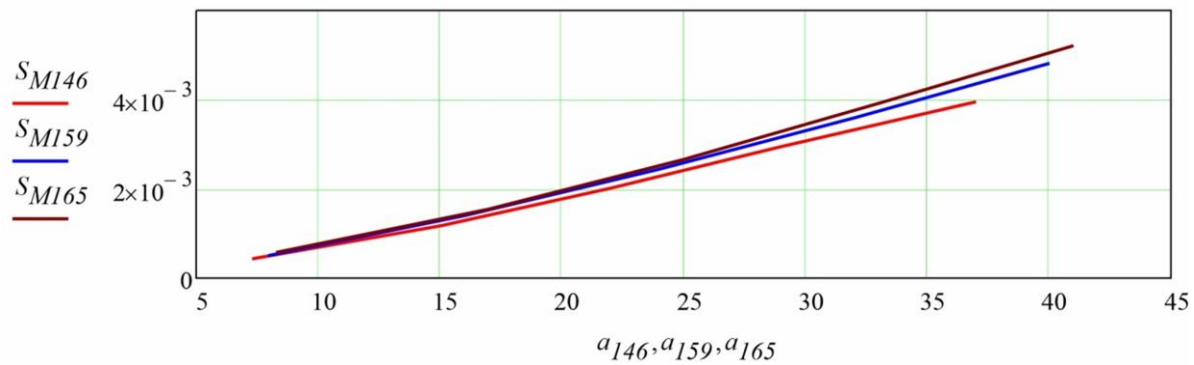


а) ОБТ-108, 120, 127; б) ОБТ-146, 159, 165; в) ОБТ-171, 178, 203; г) ОБТ-229, 245, 273.

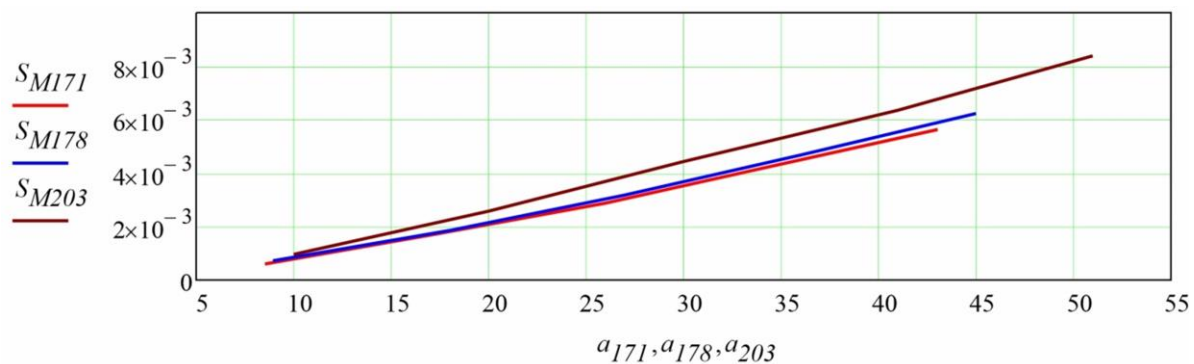
Рисунок 4 – Графіки зміни площі поверхні контактування  $S_n$  прогнугих ділянок ОБТ при їх втисканні у стінку свердловини



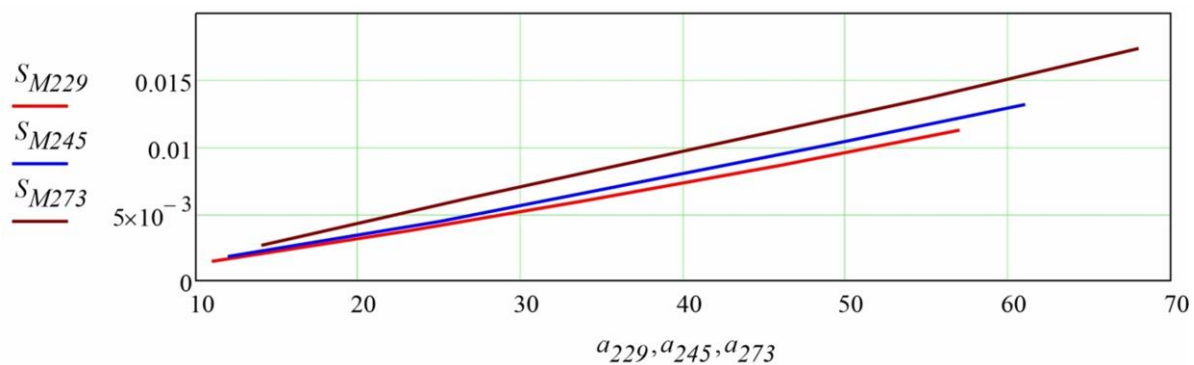
а)



б)



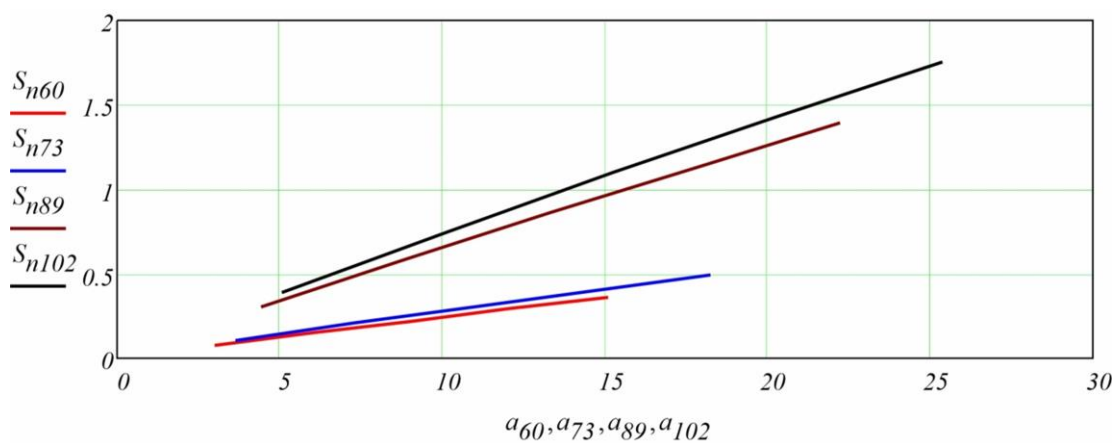
в)



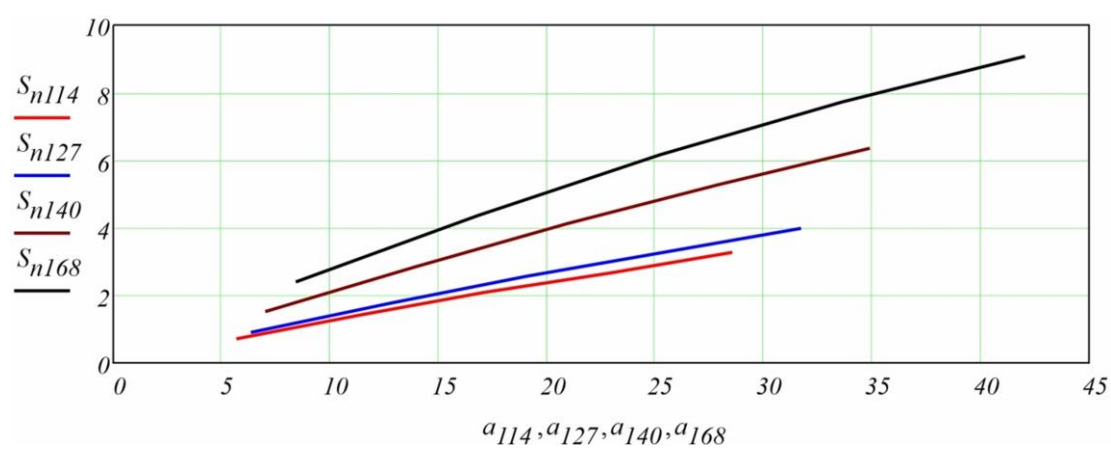
г)

а) ОБТ-108, 120, 127; б) ОБТ-146, 159, 165; в) ОБТ-171, 178, 203; г) ОБТ-229, 245, 273.

**Рисунок 5 – Графіки зміни площ мідельного перерізу  $S_M$  прогнаних ділянок ОБТ при їх втисканні у стінку свердловини**



а)



б)

а) БТ-60; 73; 89; 102; б) БТ-114; 127; 140; 168

Рисунок 6 – Графіки зміни площ поверхні контактування  $S_n$  прогнутих ділянок БТ при їх втисканні у стінку свердловини

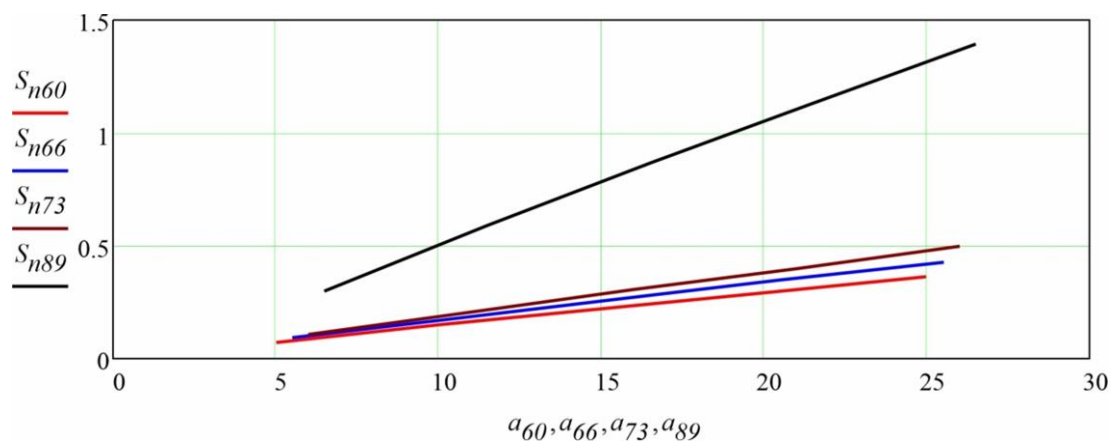


Рисунок 7 – Графіки зміни площ поверхні контактування  $S_n$  прогнутих ділянок КГТ при їх втисканні у стінку свердловини

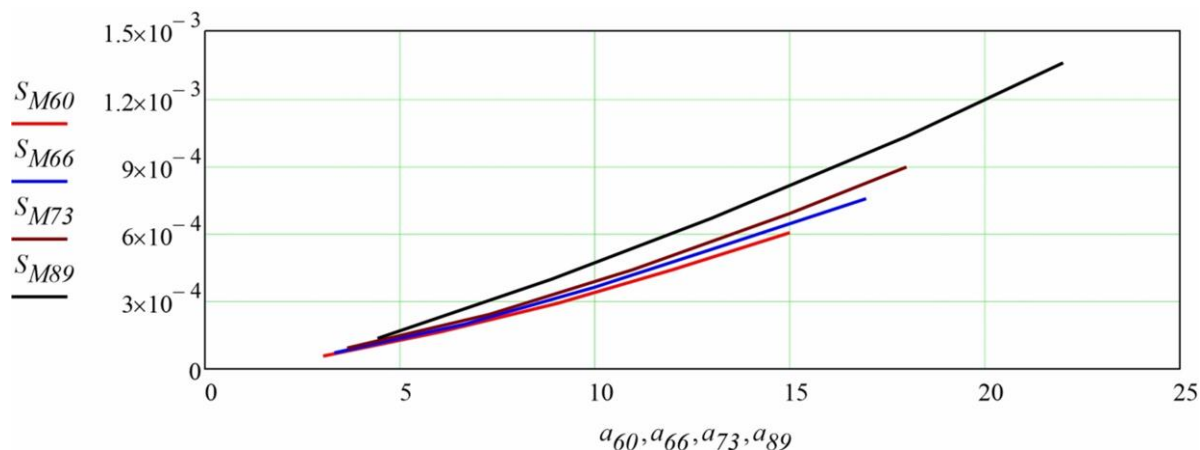
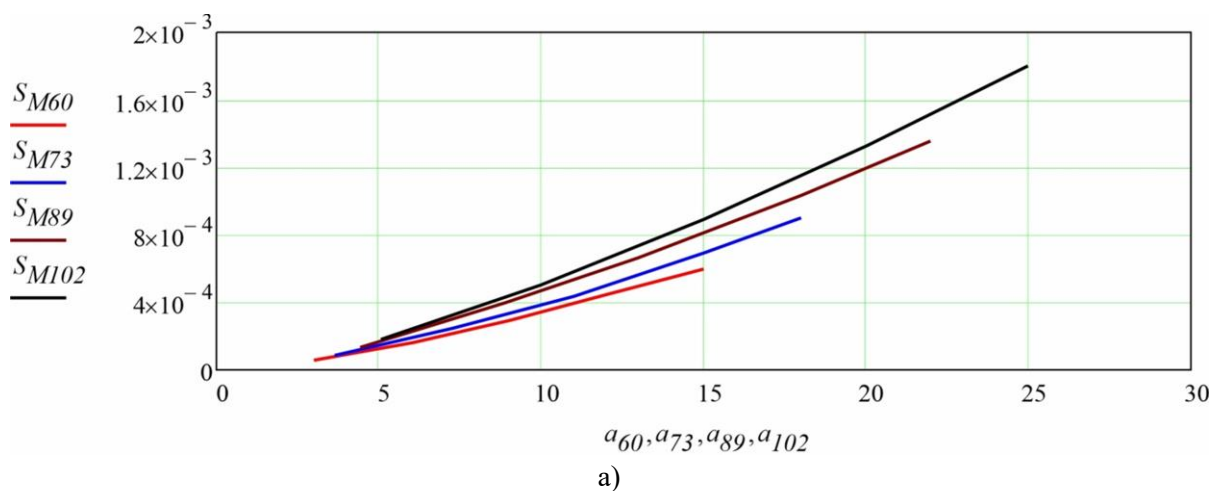
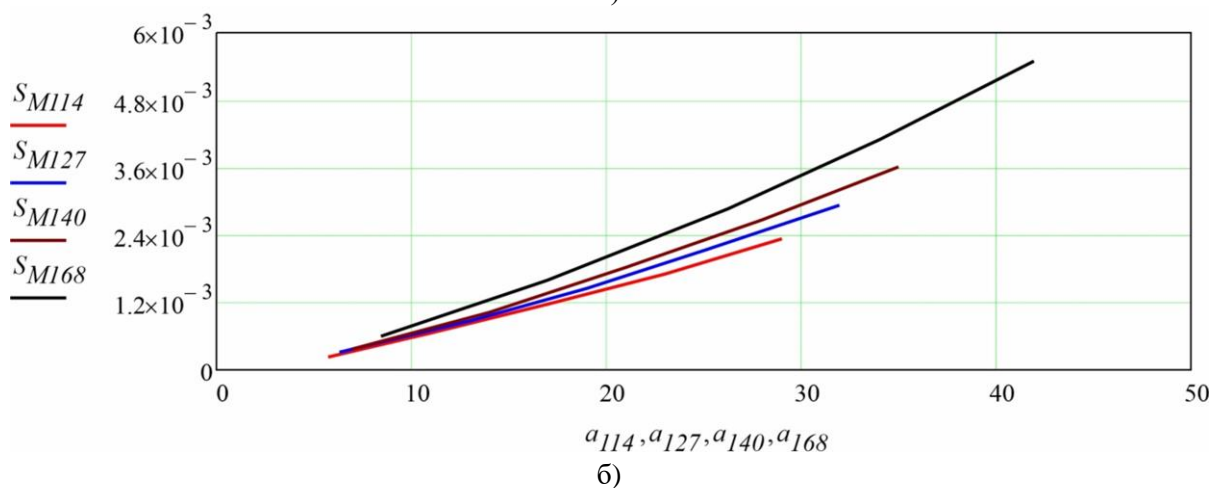


Рисунок 8 – Графіки зміни площ мідельного перерізу  $S_M$  прогнутих ділянок КГТ при їх втисканні у стінку свердловини



а)



б)

а) БТ-60; 73; 89; 102; б) БТ-114; 127; 140; 168

Рисунок 9 – Графіки зміни площ мідельного перерізу  $S_M$  прогнутих ділянок БТ при їх втисканні у стінку свердловини

Для всіх типів труб спостерігається нестійка прямолінійна залежність площі поверхні контакту  $S_n$  та площі мідельного перерізу  $S_M$  від глибини втискання  $a$ . Зі збільшенням номінального діаметра труби (наприклад, від КГТ  $\varnothing$  60,3 мм до ОБТ  $\varnothing$  273 мм) швидкість зростання обох площ суттєво зростає. Це чітко видно на порівняльних графіках (рис. 4г та 5г), де криві для більших діаметрів мають значно більший кут нахилу. Значення  $S_M$  є відносно малими і вимірюються в десятках та сотнях частках квадратного метра (наприклад, для БТ діаметром 168,3 мм при максимальному втисканні  $S_M = 0,005456 \text{ м}^2$ ). При збільшенні глибини втискання в 5 разів, площа міделя  $S_M$  зростає приблизно у 9 разів, що вказує на критичне зростання гідродинамічного опору при ковзанні труби у фільтраційній кірці. При малих глибинах втискання графічні залежності підтверджують адекватність спрощених формул (22) і (23), що пояснює параболічний характер кривих на початкових етапах контакту. Площа  $S_n$  на 2–3 порядки перевищує площу міделя  $S_M$ , наприклад, для тієї ж БТ  $\varnothing$  168,3 мм площа контакту сягає  $S_n = 9,178 \text{ м}^2$ . Тому площа контакту  $S_n$  є визначальною при розрахунку сил адгезії. На графіках (рис. 4, 6, 7) видно, що при досягненні глибини втискання  $a = 0,5r$  (половина радіуса труби), приріст площі поверхні контактування стає менш інтенсивним, що пов'язано з особливостями геометрії тора та циліндра. На основі проведених теоретичних досліджень можна виділити практичне значення отриманих результатів. Отримані графіки дозволяють прогнозувати різке зростання **сил адгезійного прилипання та в'язкого опору** при збільшенні глибини втискання, оскільки ці сили прямо пропорційні розрахованим площам. Найбільш критичними з точки зору виникнення опору є ділянки ОБТ великих діаметрів, де площа контакту зростає найшвидше, а також ділянок БТ і КГТ при втраті стійкості і великій кількості зон локального їх втискання у стінки свердловини. Такі особливості необхідно обов'язково враховувати при розрахунках допустимих осьових навантажень, що передаються долоту в процесі буріння глибоких скерованих свердловин.

## Висновки

На основі проведених теоретичних досліджень та вирішених завдань, розроблено математичну модель для визначення площі мідельного перерізу та поверхні втискання деформованої ділянки бурильної колони в стінку свердловини. Зокрема:

- встановлено, що для більш точного опису зони контакту деформованої ділянки БК зі стінкою свердловини найбільш адекватною є модель взаємного перетину тора (що імітує вигин труби) та кругового циліндра (що імітує стовбур свердловини). Це дозволило перейти від спрощеного точкового моделювання до реалістичного опису контактної поверхні;

- розроблено математичну модель на основі методу параметризації та аналізу особливих точок. Отримано аналітичні залежності для визначення координат точок перетину та сформовано інтегральне рівняння для обчислення площі поверхні втискання та площі мідельного перерізу;

- для практичного застосування із використанням комп'ютерної техніки розроблено відповідні програмні коди, а також запропоновано спрощені формули розрахунку площ для випадків малих глибин втискання;

Чисельне моделювання для різних типів труб (ОБТ, БТ, КГТ) показало, що площа контакту на 2–3 порядки перевищує площу міделя. Встановлено, що при збільшенні глибини втискання в 5 разів площа міделя зростає приблизно у 9 разів, що свідчить про критичне посилення гідродинамічного опору. Отримані результати можуть надалі служити базою для розрахунку сил адгезійного прилипання та в'язкого опору. Це дозволяє вдосконалити проектування профілів глибоких нафтогазових похило-скерованих свердловин із великими зенітними кутами та точніше прогнозувати величину осьового навантаження, що передається до долота.

## Подяки

Відсутні.

## Конфлікт інтересів

Відсутній.

## Список використаних джерел

- 1 Чудик І. І., Юрич А. Р., Козлов А. А. Врахування каверно- і жолобоутворення при проектуванні неорієнтованих КНБК. *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. 2007. № 2 (23). С. 45–50.
- 2 Чудик І. І. Узагальнена методика розрахунку енергетичних витрат при роботі неорієнтованих компоновок низу бурильної колони для роторного способу буріння. *Науковий вісник ІФНТУНГ*. 2013. № 2 (35). С. 121–128.
- 3 Чудик І. І., Різничук А. І. Дослідження передумов жолобоутворення на стінках свердловини замками бурильної колони. *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. 2014. № 2 (51). С. 80–87.
- 4 Analytical estimation of inertial properties of the curved rotating section in a drill string / Ja. Grydzhuk, I. Chudyk, A. Velychkovych, A. Andrusyak. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 1, № 7 (97). P. 6–14. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154827>
- 5 Volpi L. P., Cayeux E., Time R. W. Whirling dynamics of a drill-string with fluid–structure interaction. *Geoenergy Science and Engineering*. 2024. Vol. 232. Art. 212423. <https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.212423>
- 6 Fluid–Structure Interaction Study in Unconventional Energy Horizontal Wells Driven by Recursive Algorithm and MPS Method / X. Gao, D. Zhao, Y. Zhang, Y. Chen, Z. Gao, X. Zhang, S. Wang. *Applied Sciences*. 2025. Vol. 15, № 12. Art. 6743. <https://doi.org/10.3390/app15126743>
- 7 Research on friction characteristics of drill string in whole well section of gas drilling based on finite element method / Dianchen Liu, Xiao Huang, Ke Deng, Pan Fang, Hai Yan, Chengxiao Li, Ketao Cai. *Journal of Vibroengineering*. 2025. Vol. 27, issue 3. P. 567–581. <https://doi.org/10.21595/jve.2025.24519>
- 8 Research on the dynamic behavior of flexible drilling tools in ultrashort-radius radial horizontal wells / Z. Lin, M. Luo, J. Wang, T. Xiu, Q. Li. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. Art. 7230. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-57742-3>
- 9 Mechanism of wellbore instability considering tubular-string contact with the wellbore wall / Y. Zhou, H. Zhang, Y. Wu, X. Li, C. Xi, K. Lv, H. Zhang, X. Wang. *Scientific Reports*. 2025. Vol. 15. Art. 26375. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-025-10714-7>
- 9 Rovenski V. *Modeling of Curves and Surfaces with MATLAB®*. New York : Springer, 2010. 459 p. (Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology). DOI: <http://doi.org/10.1007/978-0-387-71278-9>
- 10 Surface to Surface Intersections / N. M. Patrikalakis, T. Maekawa, K. H. Ko, H. Mukundan. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. 2004. P. 449–458. <https://doi.org/10.1080/16864360.2004.10738287>
- 11 Шапочка А. І., Міца О. В. Комп'ютерне моделювання перетинів квадратичних поверхонь. *Інноваційна наука: пошук відповідей на виклики сучасності: матеріали міжнар. наук.-практ. конф. (Могилів-Подільський, 6 груд. 2024 р.)*. Могилів-Подільський: МЦНД, 2024. С. 219–224. <https://doi.org/10.62731/mcnd-06.12.2024.003>
- 12 Breda A., Trocadero A., Dos Santos J. Topological Properties of the Intersection Curves Between a Torus and Families of Parabolic or Elliptical Cylinders. *Axioms*. 2024. Vol. 13, no. 12. Art. 852. <https://doi.org/10.3390/axioms13120852>
- 14 Про аналітичне визначення площі зони контактування прогнутної ділянки бурильної колони із стінкою свердловини / Я. С. Гриджук та ін. *Перспективи розвитку машинобудування та транспорту – 2023: матеріали III Міжнар. наук.-техн. конф. (м. Вінниця, 1–3 черв. 2023 р.)*. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 63–65. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/prmt/pmrt2023/paper/viewFile/18357/15173> (дата звернення: 06.05.2024).
- 15 *Handbook of Computer Aided Geometric Design* / ed. by G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. Amsterdam: North-Holland, 2002. 825 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-51104-1.X5000-X>

## References

1. Chudyk I. I., Yurych A. R., Kozlov A. A. Vrakhuvannia kaverno- i zholoboutvorennia pry proektuvanni neoriientovanykh KNBK. *Rozvidka ta rozrobka naftovykh i hazovykh rodovysch.* 2007. No 2 (23). P. 45–50.
2. Chudyk I. I. Uzahalnena metodyka rozrakhunku enerhetychnykh vytrat pry roboti neoriientovanykh komponovok nyzu burylnoi kolony dlia rotornoho sposobu burinnia. *Naukovyi visnyk IFNTUNH.* 2013. № 2 (35). P. 121–128.
3. Chudyk I. I., Riznychuk A. I. Doslidzhennia peredumov zholoboutvorennia na stinkakh sverdlovyny zamkamy burylnoi kolony. *Rozvidka ta rozrobka naftovykh i hazovykh rodovysch.* 2014. No 2 (51). P. 80–87.
4. Analytical estimation of inertial properties of the curved rotating section in a drill string / Ja. Grydzhuk, I. Chudyk, A. Velychkovych, A. Andrusyak. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. Vol. 1, No 7 (97). P. 6–14. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154827>
5. Volpi L. P., Cayeux E., Time R. W. Whirling dynamics of a drill-string with fluid–structure interaction. *Geoenergy Science and Engineering.* 2024. Vol. 232. Art. 212423. <https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.212423>
6. Fluid–Structure Interaction Study in Unconventional Energy Horizontal Wells Driven by Recursive Algorithm and MPS Method / X. Gao, D. Zhao, Y. Zhang, Y. Chen, Z. Gao, X. Zhang, S. Wang. *Applied Sciences.* 2025. Vol. 15, No 12. Art. 6743. <https://doi.org/10.3390/app15126743>
7. Research on friction characteristics of drill string in whole well section of gas drilling based on finite element method / Dianchen Liu, Xiao Huang, Ke Deng, Pan Fang, Hai Yan, Chengxiao Li, Ketao Cai. *Journal of Vibroengineering.* 2025. Vol. 27, issue 3. P. 567–581. <https://doi.org/10.21595/jve.2025.24519>
8. Research on the dynamic behavior of flexible drilling tools in ultrashort-radius radial horizontal wells / Z. Lin, M. Luo, J. Wang, T. Xiu, Q. Li. *Scientific Reports.* 2024. Vol. 14. Art. 7230. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-57742-3>
9. Mechanism of wellbore instability considering tubular-string contact with the wellbore wall / Y. Zhou, H. Zhang, Y. Wu, X. Li, C. Xi, K. Lv, H. Zhang, X. Wang. *Scientific Reports.* 2025. Vol. 15. Art. 26375. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-10714-7>
10. Rovenski V. *Modeling of Curves and Surfaces with MATLAB®.* New York : Springer, 2010. 459 p. (Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology). <http://doi.org/10.1007/978-0-387-71278-9>
11. Surface to Surface Intersections / N. M. Patrikalakis, T. Maekawa, K. H. Ko, H. Mukundan. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing.* 2004. P. 449–458. <https://doi.org/10.1080/16864360.2004.10738287>
12. Shapochka A. I., Mitsa O. V. Kompiuterne modeliuвання peretyniv kvadratnykh poverkhon. *Innovatsiina nauka: poshuk vidpovidei na vyklyky suchasnosti: materialy mizhnar. nauk.-prakt. konf. (Mohyliv-Podilskyi, 6 hrud. 2024 r.).* Mohyliv-Podilskyi: MTsND, 2024. S. 219–224. <https://doi.org/10.62731/mcnd-06.12.2024.003>
13. Breda A., Trocadero A., Dos Santos J. Topological Properties of the Intersection Curves Between a Torus and Families of Parabolic or Elliptical Cylinders. *Axioms.* 2024. Vol. 13, no. 12. Art. 852. <https://doi.org/10.3390/axioms13120852>
14. Pro analitychne vyznachennia ploshchi zony kontaktuvannia prohnutnoi dilianky burylnoi kolony iz stinkoiu sverdlovyny / Ya. S. Hrydzhuk ta in. *Perspektyvy rozvytku mashynobuduvannia ta transportu – 2023: materialy III Mizhnar. nauk.-tekhn. konf. (m. Vinnytsia, 1–3 cherv. 2023 r.).* Vinnytsia: VNTU, 2023. S. 63–65. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/prmt/pmrt2023/paper/viewFile/18357/15173> (data zvernennia: 06.05.2024).
15. *Handbook of Computer Aided Geometric Design* / ed. by G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. Amsterdam: North-Holland, 2002. 825 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-51104-1.X5000-X>

## MODEL FOR ESTIMATING THE MEDIUM CROSS-SECTIONAL AREA AND THE PRESSURE SURFACE OF A DEFORMED PIPE SECTION WITH WELLBORE WALLS

### Hrydzhuk Ya. S.

Doctor of Technical Sciences, Professor  
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas  
15 Karpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-1429-8640>  
e-mail: jaroslav.gridzhuk@gmail.com

### Kondur O. S.

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor  
Vasyl Stefanyk Carpathian National University  
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0001-9342-1127>  
e-mail: oksana.kondur@cnu.edu.ua

### Slabyi O. O.

PhD in Technical Sciences, Associate Professor  
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas  
15, Karpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-1274-2875>  
e-mail: burewisnyk@gmail.com

### Kondur T. I.

Postgraduate student  
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas  
15, Karpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine  
<https://orcid.org/0009-0009-4629-030X>  
e-mail: kondur-a13322@nung.edu.ua

### Mokhniy I. Yu.

Postgraduate student  
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas  
15, Karpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0003-3852-3934>  
e-mail: mox2308@gmail.com

**Abstract.** This article addresses a relevant scientific and applied problem in oil and gas engineering: the development of mathematical tools for the precise determination of the geometric parameters of contact between the drill string and the borehole walls. During the construction of deep deviated and horizontal wells, the drill string, under the action of significant axial and bending loads, undergoes deformations that lead to its local embedding in the filter cake and rock formation. Traditional approaches, based on point contact modelling or approximate empirical relationships, do not allow for an adequate assessment of the adhesive forces and viscous resistance, which significantly influence energy consumption and the efficiency of axial force transmission to the bit. This paper proposes an innovative geometric model in which the local contact zone of the deflected section of the drill bit is identified as part of the surface of a torus cut out by a circular cylinder, which models the borehole. This approach allowed the complex curvature of both surfaces to be taken into account. Using methods of parameterisation and analysis of singular points, the authors established analytical relationships for determining the coordinates of the intersection boundary and formulated integral equations for calculating the area of the contact surface and the area of the mid-section. Since the obtained integrals are not expressed in elementary functions, the Simpson numerical method was applied to solve them, implemented in Python and Maple code. Numerical modelling carried out for various pipe sections of coiled tubing (CT), drill pipe (DP) and weighted drill pipe (WDP) sections revealed important patterns: it was established that the contact area exceeds the area of the mid-section cross-section by 2–3 orders of magnitude. It has been demonstrated that as the insertion depth increases fivefold, the cross-sectional area increases by approximately ninefold, indicating a critical increase in hydrodynamic resistance. For cases of small deformations, the authors have proposed simplified parabolic formulas, which facilitate practical engineering calculations. The results of the study form the basis for improving methods for calculating the total drag forces on the drill string and for designing wellbore profiles with large zenith angles, thereby minimising the risk of tool snagging.

**Keywords:** drill string, borehole wall, contact area, mid-section, torus, cylinder, indentation, mathematical modelling, numerical methods.