
Матеріали, конструкції та обладнання об'єктів нафтогазового комплексу

УДК 622.243.23

DOI: 10.31471/1993-9868-2023-2(40)-38-52

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ НА ДІЛЯНЦІ ПОХИЛОЇ СВЕРДЛОВИНИ

Я. С. Гриджук, О. О. Слабий*, Ахмед Аль-Танакчі, Т. І. Кондур, І. Ю. Мохній

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: burewisnyk@pung.edu.ua

Особливістю процесу спорудження похило-скерованих свердловин є те, що бурильна колона на похилій ділянці свердловини постійно контактує із стінкою. В результаті на неї, окрім традиційних сил ваги та в'язкого опору рухові, також діють нелінійні просторові сили контактної взаємодії, що спричинюють її просторовий напружено деформований стан, чинять опір рухові і є причиною виникнення негативних динамічних явищ. Розуміння даних процесів є важливим для ефективного планування процесу спорудження свердловин. Дана робота присвячена створенню уточненої математичної моделі просторового напружено-деформованого стану бурильної колони, що знаходиться на ділянці похилої свердловини. Модель розроблена на основі модифікованої моделі стрижня Кірхгофа, в якій враховано можливість осьової його деформації. При побудові моделі враховані такі силові фактори, що діють на бурильну колону під час роботи: силу ваги; зусилля, що виникає внаслідок деформації стінки свердловини бурильною колоною; силу тертя між бурильною колоною і стінкою свердловини; силу опору рухові, а також піднімальну силу, яка виникає в результаті переміщення бурильної колони в середовищі промивальної рідини; силові фактори, що виникають внаслідок протікання промивальної рідини бурильною колоною. На основі запропонованої математичної моделі бурильної колони, застосовуючи чисельний метод ліній, розроблено імітаційну модель, що дає змогу досліджувати зміну напружено-деформованого стану бурильної колони в часі. Результати імітаційного моделювання підтвердили адекватність створеної моделі та можливість її застосування для аналізу зміни просторового деформованого стану бурильної колони в часі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, бурильна колона, похило-скероване буріння, теорія стрижня Кірхгофа, імітаційне моделювання.

The process of constructing directional wells involves the drill string constantly coming into contact with the well wall. This results in standard forces of weight and viscous resistance to movement, as well as nonlinear spatial forces of contact interaction. These forces cause the drill string to be spatially stressed and deformed, resist movement, and lead to negative dynamic phenomena. To effectively plan the well construction process, it's important to understand these processes. This work focuses on creating a refined mathematical model of the spatial stress-strain state of the drill string located in the inclined well section. The model is developed based on the modified Kirchhoff rod model, which accounts for the axial deformation of the rod. The model takes into account various force factors that act on the drill string during operation, including the force of weight, the force resulting from the deformation of the well wall by the drill string, the friction force between the drill string and the well wall, the force of movement resistance, the lifting force resulting from the movement of the drill string in the mud, and force factors arising from the flow of the mud through the drill string. Based on the proposed mathematical model of drill string deformation, using the numerical method of lines, a simulation model was developed, which makes it possible to study the change in the stress-strain state of the drill string over time. The results of simulation modeling

confirmed the adequacy of the created model and the possibility of its application for the analysis of changes in the spatially deformed state of the drill string over time.

Keywords: stress-strain state, drill string, inclined-directed drilling, Kirchhoff rod theory, simulation modeling.

Вступ

Похило-скероване буріння на сьогоднішній день набуло значного поширення при спорудженні свердловин для видобутку корисних копалин, коли побудова вертикальних свердловин є неможлива, економічно недоцільна або обмежена законодавчим регулюванням. Це часто зустрічається при розробці шельфових родовищ поряд з береговою лінією, розробці родовищ у сильно пересічених та заболочених місцевостях, розробці родовищ у місцевостях, які мають природоохоронний статус, складних геологічних умовах, при кущовому та багатостовбуровому бурінні. Особливістю похило-скерованого буріння є те, що профіль свердловини представляє собою набір викривлених і похилих ділянок, на яких бурильна колона перебуває у складному напружено-деформованому стані та постійно контактує із стінками свердловини. Розуміння особливостей такого напружено-деформованого стану, особливостей контактної взаємодії між бурильною колоною і стінками свердловини, а також впливу на них різних конструктивних та технологічних факторів дасть змогу вирішувати цілу низку прикладних задач, які виникають при спорудженні похило-скерованих свердловин.

Дана робота присвячена побудові математичної моделі для вивчення особливостей зміни в часі просторового деформованого стану бурильної колони, що приводиться в рух верхнім приводом на похилій ділянці свердловини.

Аналіз сучасних закордонних і вітчизняних досліджень та публікацій

Задача побудови та розв'язування математичної моделі деформованого стану бурильної колони, що знаходиться у похило-скерованій свердловині, є доволі складною, оскільки потребує розроблення моделі просторової деформації бурильної колони, яка б враховувала можливість втрати нею стійкості під дією осьової сили і крутного моменту, часто з врахуванням обертання колони верхнім приводом. Окрім цього, в моделі слід врахувати велике число внутрішніх і зовнішніх, статичних та динамічних силових факторів, складну геометричну форму свердловини та з достатньою точністю описати процес взаємодії бурильної колони зі стінками свердловини. Зважаючи на це, в більшості досліджень приймаються ті чи інші припущення, за допомогою яких вдається спрости-

ти математичну та чисельну складність одержаної математичної моделі.

Одним із найпростіших підходів до вивчення деформованого стану бурильної колони у свердловині є постановка плоскої статичної задачі, де бурильна колона подається жорстким стрижнем Ейлера-Бернуллі, навантаженим зовнішніми поздовжніми і поперечними силами, деформації якого обмежені геометрією стінок свердловини. Такий підхід використовувався в одній із ранніх робіт [1], де вивчався деформований стан бурильної колони у похилій свердловині за методом кінцевих елементів. Створена в роботі модель розглядала плоску статичну рівновагу бурильної колони на похилій ділянці свердловини, нехтуючи при цьому силами тертя між бурильною колоною і стінками свердловини, впливом промивальної рідини і інших силових факторів. Аналогічний підхід використовували Rocheleau D. N. і Dareing D. W. в роботі [2] де була розроблена статична модель для дослідження деформованого стану бурильної колони у викривленій ділянці свердловини. Недолік такого підходу полягає в тому, що вивчення деформації бурильної колони у площині не достатньо точно описує реальну деформацію бурильної колони у свердловині.

Проведені експериментальні дослідження показують, що деформація бурильної колони після втрати стійкості в залежності від різних факторів набуває вигляду «змійки» («синусоїди») або просторової спіралі [3–5]. Зважаючи на це, в більшості досліджень розглядають просторову модель деформації бурильної колони. В найпростіших моделях розглядається рівновага бурильної колони як стрижня, що не володіє жорсткістю на згин (softstring модель) під дією сил ваги, реакцій з боку стінки свердловини із врахуванням [6] або нехтуванням силами тертя [7]. Хоча такий підхід не дає змоги точно описувати рівновагу бурильної колони, однак чисельна простота розв'язування моделей такого типу сприяє поширенню даного методу [8–10]. Інший підхід полягає у поданні бурильної колони як стрижня, що володіє жорсткістю на розтяг, згин і кручення та піддається поперечній і крутній деформації (stiffstring модель).

Основним фактором, що впливає на точність і адекватність створеної моделі, є опис взаємодії бурильної колони із стінками свердловини. Як правило, цю взаємодію описують двома силами: реакцією з боку стінки і зусил-

лям тертя, що виникає в зоні контакту. В найпростіших *softstring* моделях реакцію з боку стінки свердловини визначають, складаючи рівняння силової рівноваги по нормальній осі до точки контакту та приймаючи, що стінка свердловини є абсолютно жорсткою [7; 10; 11]. В *stiffstring* моделях, які передбачають можливість «відриву» бурильної колони від стінки свердловини, зусилля контакту визначають від величини деформації стінки свердловини при контакті із бурильною колоною. В різних роботах автори моделювали стінку свердловини лінійно пружним тілом [12], нелінійно пружним тілом [8; 13–15] або пружно-в'язким тілом [16; 17]. Сили тертя найчастіше моделюються тертям Кулона [2; 11; 18–21]. Для покращення точності моделі окремі автори розраховували приведені коефіцієнти тертя між стінкою свердловини і бурильною колоною відповідно до отриманих промислових даних [6; 7; 18]. Однак, модель тертя Кулона погано описує тертя при розв'язуванні задач динаміки, що вимагає застосування складніших моделей тертя. Tran, Nguyen і інші [16; 17] використовували модифіковану модель тертя Кулона зі згладженим переходом від статичного до динамічного тертя. Тихонов і ін. [8; 13; 14] використовували гістерезисну модель тертя із коефіцієнтом тертя, що залежить від відносної швидкості, модель якого отримана за результатами експерименту [22]. Long Y., Wang Xi і інші [23] також використовують гістерезисну модель тертя. Оцінка вибору різних моделей тертя при описі взаємодії бурильної колони із стінками свердловини проведено в роботі [24].

Іншим важливим чинником, який впливає на динаміку бурильної колони, є врахування впливу протікання промивальної рідини. В найпростіших моделях вплив промивальної рідини враховується тільки через наявну силу Архімеда. В роботах [6; 25] також враховано вплив тиску промивальної рідини на зміну зусилля натягу через теорію ефективного натягу [26; 27]. Найбільш детально вплив промивальної рідини на деформований стан бурильної колони розглянуто в роботах [20; 28], де окрім виштовхувальної сили і ефективного натягу враховано інерційні сили і сили опору, які виникають при протіканні потоку рідини, що знаходиться в бурильній колоні і міжтрубному просторі. Впливом інших факторів при побудові моделей, як правило, нехтують. Однак Li Zifeng [29] також враховував поздовжнє видовження бурильних труб від зміни температури.

Існують два домінуючі підходи до створення математичних моделей статички та дина-

міки просторового деформованого стану бурильної колони. Перший підхід полягає у побудові системи диференціальних рівнянь у часткових похідних, виведених під час розгляду рівноваги елементарної частини бурильної колони під дією зовнішніх навантажень, внутрішніх сил та сил інерції, виходячи із законів теорії пружності. Як правило, в результаті отримується система диференціальних рівнянь з частковими похідними, які розв'язують чисельними методами, зокрема методом кінцевих різниць та методом ліній [8; 13; 23; 30; 31]. Інший підхід полягає у визначенні механічної енергії деформованої частини бурильної колони та порівнянні його з елементарними роботами зовнішніх силових факторів. Відповідно до такого підходу, як правило, отримують кінцево-елементну модель бурильної колони [16–18; 21; 32; 33].

Висвітлення невирішених раніше частин загальної проблеми

Проведений огляд існуючих досліджень вказує, що вивчення динаміки бурильної колони у свердловині є доволі складною задачею, і на сьогодні не існує моделей, які б з достатньою точністю описували динаміку деформованого стану бурильної колони у похило-скерованій свердловині із врахуванням впливу промивальної рідини. Зважаючи на це, було сформульовано мету та завдання дослідження.

Мета та завдання дослідження

Метою дослідження є отримання математичної моделі опису зміни просторового деформованого стану бурильної колони на похилій ділянці свердловини, яка з достатньою точністю описує контактну взаємодію бурильної колони із стінкою свердловини, а також враховує вплив протікання промивальної рідини по ній. На основі отриманої моделі створити імітаційну модель в середовищі мови Modelica, яка в подальшому повинна бути включена в пакет для моделювання динаміки роботи бурильної колони при бурінні похило-скерованих свердловин.

Механічна модель

За об'єкт дослідження приймаємо бурильну колону на ділянці похилої свердловини. Розрахункова схема досліджуваного об'єкта наведена на рис. 1. Вважаємо, що досліджувана ділянка свердловини є ідеальним циліндром діаметром d_w довжиною L_w , вісь якого нахилена під кутом α до горизонту. Верхній кінець похилої ділянки свердловини знаходиться на гли-

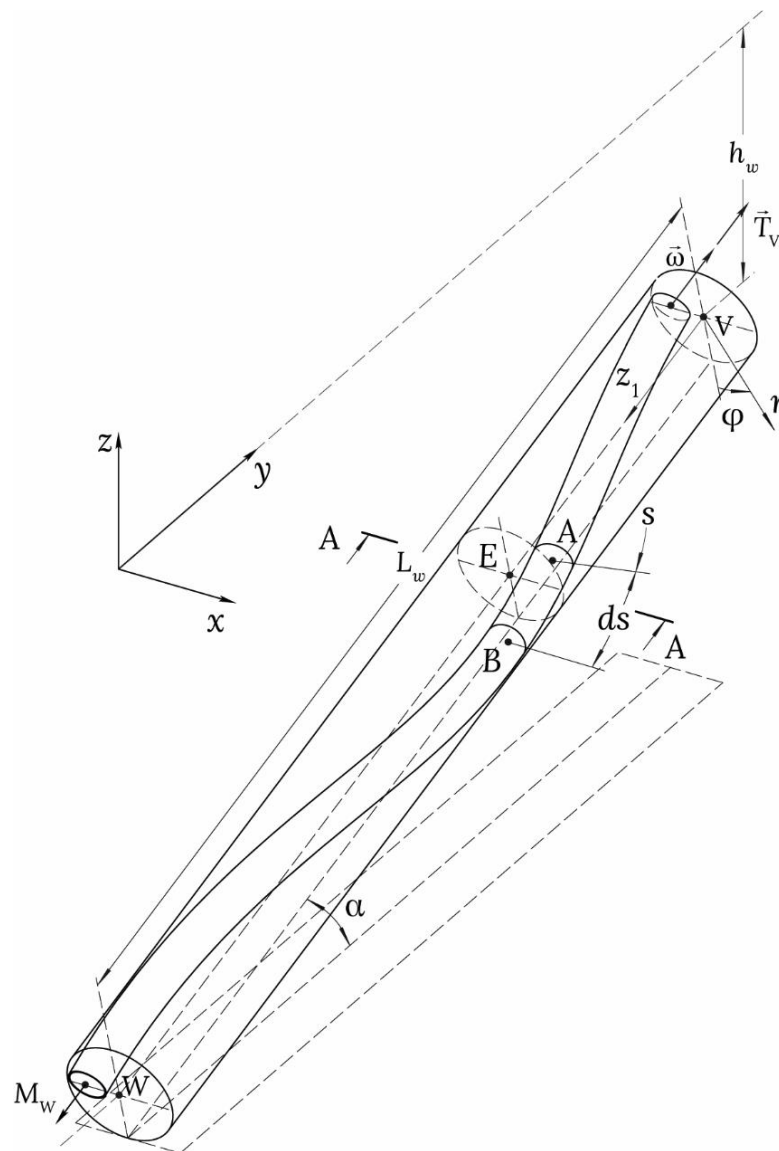


Рисунок 1 – Механічна модель досліджуваної системи

бині h_w від гирла свердловини. В свердловині знаходиться бурильна колона, що приводиться в рух верхнім приводом. Бурильну колону представляємо суцільним однорідним пустотілим стрижнем круглого перерізу довжиною L_d в недеформованому стані, зовнішній діаметр якого рівний D_d , а діаметр отвору - d_d . Отже, площа A_i отвору бурильної колони рівна:

$$A_i = \frac{\pi d_d^2}{4}, \quad (1)$$

площа A_d поперечного перерізу бурильної колони рівна:

$$A_d = \frac{\pi}{4} (D_d^2 - d_d^2), \quad (2)$$

а площа перерізу бурильної колони A_O по зовнішньому діаметру рівна:

$$A_O = A_i + A_d = \frac{\pi D_d^2}{4}. \quad (3)$$

Матеріал, з якого виготовляються бурильні труби, характеризуємо густиною ρ_d , модулем пружності першого E_d та другого G_d роду. Вважаємо, що бурильною колоною із сталюю швидкістю v_m протікає промивальна рідина густиною ρ_m . Свердловина заповнена промивальною рідиною з аналогічними властивостями, яка рухається в зворотному напрямку. Тиск промивальної рідини в бурильній колоні позначаємо p_i , а промивальної рідини в свердловині – p_O і приймаємо їх незмінними у часі. Матеріал стінок свердловини моделюємо тілом Кельвіна Фойгта із коефіцієнтом жорсткості c_w та коефіцієнтом демпфування μ_w .

Величину тиску промивальної рідини, яка знаходиться у бурильній колоні і відповідає її верхньому кінцю, позначаємо p_V . Вважаємо, що до кінців бурильної колоні прикладаються осьова сила \vec{T}_j , крутний момент \vec{M}_j та кутова частота обертання колоні ω_j , де j – індекс який описує відповідний кінець бурильної колоні. Приймаємо, що вісь ненавантаженої бурильної колоні збігається із віссю свердловини.

Припущення

Побудову математичної моделі просторового напружено-деформованого стану бурильної колоні на ділянці похилої свердловини ведемо, прийнявши такі припущення:

1. Вважаємо, що величина поперечних деформацій бурильної колоні порівняно із довжиною півхвилі її прогину є достатньо малою. Отже, бурильну колоні подаємо стрижнем, в якому виконується гіпотеза Бернуллі, а впливом дотичних напружень при вивченні роботи колоні на згин нехтуємо.

2. Вважаємо, що зміна форми поперечного перерізу бурильної колоні у площині, перпендикулярній до осі свердловини, є достатньо малою, тож нею можна знехтувати. В усіх розрахунках, окрім випадку дослідження поперечних деформацій, вважаємо, що переріз бурильної колоні у перпендикулярній осі свердловини площині є круглим.

3. Бурильну колоні приймаємо суцільним однорідним стрижнем круглого перерізу. Впливом геометрії замків, а також механічними властивостями з'єднання бурильних труб між собою нехтуємо.

4. Вважаємо, що напруження, які виникають в колоні, не перевищують границю пружності та границю пропорційності матеріалу, з якого вона виготовлена, а отже, саму колоні моделюємо тілом Гука.

5. Вважаємо, що промивальна рідина є нестискуваною. Впливом гідродинамічних явищ на динаміку бурильної колоні нехтуємо. Приймаємо, що промивальна рідина, яка знаходиться між трубному просторі, спричиняє лише опір рухові бурильній колоні, а впливом швидкості її руху на деформований стан бурильної колоні нехтуємо.

6. Визначення контактної сили між бурильною колоною і стінкою свердловини проводимо в залежності від величини деформації стінки свердловини, яку моделюємо тілом Кельвіна-Фойхта.

7. Впливом відносного видовження осі бурильної колоні на зміну характеристик її поперечного перерізу, зокрема площі, моменту інерції перерізу тощо, через їхній незначну зміну нехтуємо.

Виходячи із прийнятих припущень, бурильна колоні є стрижнем, що піддається розтягу/стиску, крученню та просторовому згину. Отже, опис напружено-деформованого стану бурильної колоні ведемо за допомогою:

– $s(l, t)$ – функції, що описує поздовжню деформацію осі бурильної колоні;

– $\vec{u}(s, t)$ – функції, що описує просторове положення осьової лінії бурильної колоні в просторі,

де l – відстань вздовж осі бурильної колоні в недеформованому стані до заданого перерізу, t – час.

Системи координат та кінематика руху

Для побудови математичної моделі використаємо три системи координат. Одну нерухому глобальну декартову, в якій визначається положення свердловини в просторі, другу – циліндричну, в якій визначається деформований стан бурильної колоні у свердловині і третю – рухому систему координат, що жорстко пов'язана з геометрією колоні. Слід зауважити, що оскільки колоні моделюється стрижнем круглого перерізу, початковий вибір напрямку осей рухомої системи координат не залежить від геометрії стрижня, тому що всі осі, які проходять через центр стрижня, є головними. Отже, для побудови математичної моделі використовуватимемо такі системи координат (рис. 1):

– декартову xuz , пов'язану із гирлом свердловини, вісь z якої паралельна напрямку дії сили ваги; базиси даної системи координат позначимо $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$;

– циліндричну $z_1 r \varphi$, що жорстко пов'язана із геометрією свердловини, вісь z_1 якої спрямовуємо вздовж осі свердловини; базиси даної системи координат позначимо $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$;

– рухому систему, що рухається вздовж деформованої осі бурильної колоні; базиси даної системи, позначимо $\{\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3\}$.

Зважаючи на особливості диференціювання векторів в рухомих системах координат, для кращої наочності вектори, задані в різних системах координат, позначатимемо наступним чином:

$$\begin{aligned}\vec{r}_X &= r_x \hat{x}_1 + r_y \hat{x}_2 + r_z \hat{x}_3; \\ \vec{r} &= r_{z1} \hat{e}_1 + r_r \hat{e}_2 + r_\varphi \hat{e}_3; \\ \vec{r}_L &= r_1 \hat{d}_1 + r_2 \hat{d}_2 + r_3 \hat{d}_3,\end{aligned}\quad (4)$$

де \vec{r}_X – вектор, заданий в глобальній декартовій системі координат,

\vec{r} – вектор, заданий в циліндричній системі координат,

\vec{r}_L – вектор, заданий в рухомій системі координат,

r_i – проекція вектора на i -ту вісь.

Для перетворення векторів, заданих у різних базисах, використовуємо матриці переходу, тобто:

$$\begin{aligned}\vec{r}_X &= A\vec{r}, \quad \vec{r} = A^T \vec{r}_X; \\ \vec{r}_L &= Q\vec{r}, \quad \vec{r} = Q^T \vec{r}_L,\end{aligned}\quad (5)$$

де Q і A – матриці переходу.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & 2q_2q_4 + 2q_1q_3 \\ 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2q_3q_4 - 2q_1q_2 \\ 2q_2q_4 - 2q_1q_3 & 2q_3q_4 + 2q_1q_2 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де q_1, q_2, q_3 і q_4 – коефіцієнти одиничного кватерніона q :

$$q = q_1 + q_2 \cdot i + q_3 \cdot j + q_4 \cdot k,$$

що описує поворот між базисами циліндричної та рухомої системи координат. Оскільки кватерніон повороту є одиничним, то повинна виконуватись умова:

$$\begin{aligned}\|q\| &= 1; \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 &= 1.\end{aligned}\quad (7)$$

Враховуючи вищесказане, для визначення деформованого стану бурильної колони необхідно також визначити чотири коефіцієнти кватерніона, які є функціями від s і t . Для зручності подамо їх у вигляді вектора $\vec{q} = [q_1(s,t), q_2(s,t), q_3(s,t), q_4(s,t)]^T$. Виразимо зміну напрямку базисів рухомої системи координат по довжині колони та в часі через коефіцієнти кватерніона повороту за аналогією з підходом, наведеним в роботі [34]. Виходячи із правил диференціальної геометрії, напрямки базисів рухомої системи координат можна знайти за формулою

$$\hat{d}_1 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}. \quad (8)$$

Відповідно до формул Френне-Серрізнаємо, що

Вибір підходу для визначення коефіцієнтів матриці переходу Q між базисами рухомої і циліндричної системи координат безпосередньо впливає на кінцеву чисельну складність і стабільність отримуваної моделі. Загалом для визначення дев'яти коефіцієнтів матриці переходу Q достатньо знати три незалежні величини. Однак, традиційний підхід із використанням кутів Ейлера має низку недоліків. Це зумовлено потребою у виконанні значної кількості тригонометричних обчислень та наявністю невизначеності за певних умов [32, 34]. Зважаючи на це, для переходу між базисами використовуємо поворот за допомогою кватерніона [34], тоді матриця переходу матиме вигляд:

$$\frac{\partial \hat{d}_i}{\partial s} = \vec{\kappa}_L \times \hat{d}_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \hat{d}_i}{\partial t} = \vec{\omega}_L \times \hat{d}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

де $\vec{\kappa}_L = \kappa_1 \hat{d}_1 + \kappa_2 \hat{d}_2 + \kappa_3 \hat{d}_3$ – вектор кривизни, що описує зміну напрямку базисів рухомої системи координат по довжині колони,

$\vec{\omega}_L = \omega_1 \hat{d}_1 + \omega_2 \hat{d}_2 + \omega_3 \hat{d}_3$ – вектор кутової швидкості, що описує зміну напрямку базисів рухомої системи координат в часі. Помноживши рівняння (9) на відповідний орт \hat{d}_i та здійснивши математичні перетворення, отримуємо:

$$\kappa_1 = -\hat{d}_2 \frac{\partial \hat{d}_3}{\partial s}, \quad \kappa_2 = -\hat{d}_3 \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial s}, \quad \kappa_3 = -\hat{d}_1 \frac{\partial \hat{d}_2}{\partial s}. \quad (11)$$

Представимо орти рухомої системи координат \hat{d}_i як функції від \vec{q} . Тоді кожен стовпець матриці переходу Q буде відповідати відповідному базису в рухомій системі координат:

$$Q = [\hat{d}_1(\vec{q}(s,t)) \quad \hat{d}_2(\vec{q}(s,t)) \quad \hat{d}_3(\vec{q}(s,t))]. \quad (12)$$

Враховуючи прийняті припущення, розглянемо порядок взяття похідної по базису:

$$\frac{\partial \hat{d}_i}{\partial s} = \frac{\partial \hat{d}_i}{\partial \vec{q}} \frac{\partial \vec{q}}{\partial s} = J \frac{\partial \vec{q}}{\partial s}, \quad (13)$$

де J – матриця Якобі. Підставивши рівняння (13) і (12) в рівняння (11) та здійснивши математичні перетворення із врахуванням (7), вели-

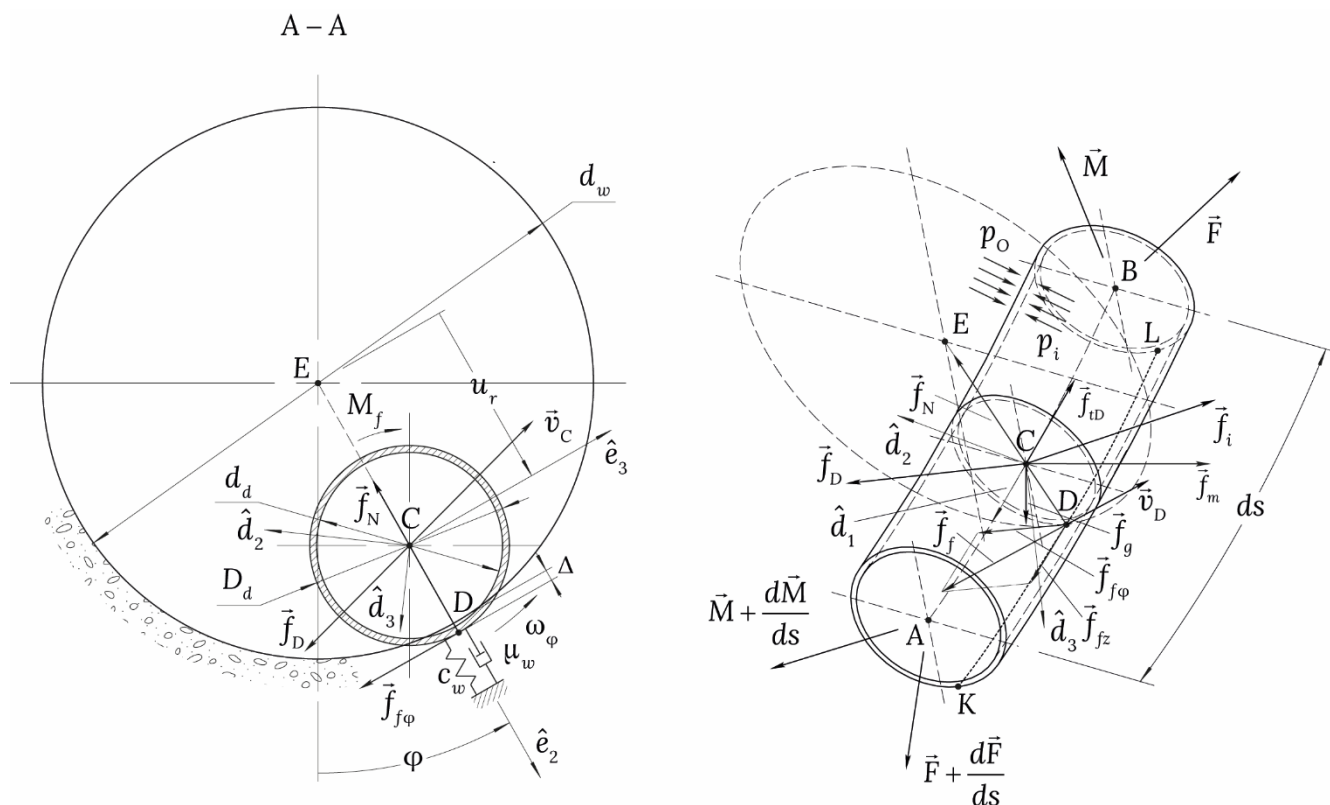


Рисунок 2 – Силкові фактори, що діють на елемент бурильної колони

чину коефіцієнтів вектора $\vec{\kappa}_L$ можна задати як функцію від \vec{q} :

$$\kappa_i = 2B_i \vec{q} \frac{\partial \vec{q}}{\partial s}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

де B_i – косо-симетрична матриця:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так само встановлюємо залежність для векторів кутової швидкості $\vec{\omega}$:

$$\omega_i = 2B_i \vec{q} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}. \quad (16)$$

В результаті отримані кінематичні залежності рухомої системи координат як функцію від довжини деформованої осі бурильної

колони s . Оскільки параметр s залежить також від часу, перейдемо до визначень кінематичних залежностей як функцій довжини по недеформованій осі бурильної колони l , для чого введемо поняття поздовжньої деформації осі бурильної колони:

$$\lambda = \frac{\partial s}{\partial l}. \quad (17)$$

Застосувавши до рівнянь (8) і (14) правило ланцюга, отримуємо:

$$\hat{d}_1 = \lambda \frac{\partial \vec{u}}{\partial l}; \quad (18)$$

$$\kappa_i = 2\lambda B_i \vec{q} \frac{\partial \vec{q}}{\partial l}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рівняння динаміки роботи бурильної колони

Щоб вивести рівняння динаміки роботи бурильної колони, розглянемо рівняння рівноваги її деформованої частини довжиною ds , що відповідає довжині dl недеформованої осі балки під дією зовнішніх та внутрішніх сил та моментів (рис. 2). Згідно з [35, 36] рівняння динаміки стрижня має вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}; \\ \rho_d A_d \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\partial Q^T \vec{F}_L}{\partial l} + \lambda \vec{f}; \\ \rho_d I \frac{\partial \vec{\omega}_L}{\partial t} + \vec{\omega}_L \times I \vec{\omega}_L &= \\ &= \frac{\partial \vec{M}_L}{\partial l} + \vec{\kappa}_L \times \vec{M}_L + \lambda (Q \hat{d}_1 \times \vec{F}_L) + \lambda \vec{m}, \end{aligned} \quad (19)$$

де \vec{u} – функція, що описує просторове положення деформованої осі бурильної колони, яка визначається в циліндричній системі координат і має вигляд:

$$\vec{u} = u_{z1} \hat{e}_1 + u_z \hat{e}_2, \quad (20)$$

\vec{v} – швидкість елемента стрижня,

\vec{F} – вектор внутрішніх сил, що діють у перерізі стрижня, величиною

$$\vec{F} = F_1 \hat{d}_1 + F_2 \hat{d}_2 + F_3 \hat{d}_3, \quad (21)$$

де F_i – проекція вектору внутрішньої сили на i -ту вісь рухомої системи координат,

$\vec{f} = \sum \vec{f}_i$ – сумарний приведений вектор зовнішніх розподілених сил, що діють на одиницю довжини стрижня,

\vec{M} – вектор моменту внутрішніх сил, що діють у перерізі стрижня величиною

$$\vec{M} = M_1 \hat{d}_1 + M_2 \hat{d}_2 + M_3 \hat{d}_3, \quad (22)$$

де M_i – проекція вектору внутрішнього моменту сили на i -ту вісь рухомої системи координат,

$\vec{m} = \sum \vec{m}_i$ – сумарний приведений вектор розподіленого моменту зовнішніх сил, що діють на одиницю довжини стрижня,

I – симетричний тензор інерції елемента стержня відносно центру мас, величина якого рівна:

$$I = \frac{\pi (D_d^4 - d_d^4)}{64} \text{diag} (2,1,1). \quad (23)$$

Встановимо залежність між внутрішніми силовими факторами і деформацією бурильної колони. Величина осьового зусилля F_1 залежить від величини поздовжньої деформації. Враховуючи теорію ефективного натягу [26, 27], величина осьової сили рівна:

$$F_1 = E_d A_d (\lambda - 1) + A_o p_o - A_i p_i. \quad (24)$$

При визначенні величини зміну тиску промивальної рідини по довжині бурильної колони нехтуємо впливом деформації бурильної колони через їх незначний вплив. Отже, величина тиску промивальної рідини у свердловині рівна гідростатичному тискові, тобто

$$p_o = \rho_m g (h_w + l \sin \alpha). \quad (25)$$

Зміна тиску промивальної рідини, що протікає бурильною колоною по її довжині визначається з умови відомого значення на одному із кінців колони з врахуванням зміни гідростатичного тиску та втрат від тертя до стінок свердловини за формулою Дарсі-Вейбаха:

$$p_i = p_v + \rho_m l g \sin \alpha - \rho_m \frac{\xi}{d_d} \frac{v_m^2}{2} l, \quad (26)$$

де p_v – тиск промивальної рідини на верхньому кінці бурильної колони,

ξ – коефіцієнт тертя Дарсі.

Визначаємо крутний момент M_1 :

$$M_1 = G_d I_1 \kappa_1, \quad (27)$$

де $G_d I_1$ – жорсткість бурильної колони на кручення. Величину згинального моменту відносно двох інших осей рухомої системи координат визначаємо за формулою:

$$M_i = E_d I_i \kappa_i, \quad i = 2, 3. \quad (28)$$

де $E I$ – жорсткість бурильної колони на згин.

Силові фактори, що діють на бурильну колону

Складність дослідження рівноваги одного елемента бурильної колони полягає в тому, що на нього діють різні силові фактори, що визначаються в базисах різних систем координат. Усі розподілені зовнішні силові фактори і моменти, що діють на елемент бурильної колони, можна поділити на декілька груп за їх виникненням:

– сила ваги і сила Архімеда \vec{f}_g ;

– силові фактори, що виникають в результаті контакту бурильної колони зі стінками свердловини \vec{f}_{con} ;

– сили, що діють на елемент з боку промивальної рідини, яка знаходиться в ньому \vec{f}_m ;

– сили, що діють на елемент внаслідок його руху в середовищі промивальної рідини \vec{f}_D .

Розглянемо кожен із даних факторів окремо.

Величина сили ваги з врахуванням сили Архімеда, що діє на елемент бурильної колони рівна:

$$\vec{f}_g = -(\rho_d - \rho_m) A_d g \hat{x}_3 = (\rho_d - \rho_m) A_d g \times (\sin \alpha \hat{e}_1 + \cos \alpha \cos \varphi \hat{e}_2 - \cos \alpha \sin \varphi \hat{e}_3), \quad (29)$$

де g – пришвидження вільного падіння.

Взаємодію бурильної колони із стінками свердловини описуємо реакцією в'язі \vec{f}_N , си-

лою тертя ковзання \vec{f}_f , яка виникає в точці D контакту бурильної колони із стінкою свердловини, а також моментом тертя кочення \vec{m}_f . Реакція в'язі направляєється по нормалі до дотичної площини контакту двох тіл, а її величина залежить від деформації стінки свердловини, матеріал якої моделюємо тілом Кельвіна-Фойхта. Отже, реакція \vec{f}_N рівна:

$$f_N = \begin{cases} 0, \Delta < 0 \\ -\left(c_w \Delta + \mu_w \frac{d\Delta}{dt}\right) \hat{e}_2, \Delta \geq 0, \end{cases} \quad (30)$$

де c_w і μ_w – приведені коефіцієнти жорсткості і демпфування матеріалу стінки свердловини, Δ – величина деформації стінки свердловини, що визначається за формулою:

$$\Delta = u_r - 0.5(d_w - D_d). \quad (31)$$

Окрім реакції в'язі в точці контакту бурильної колони із стінкою свердловини виникає сила тертя ковзання \vec{f}_f , що діє в дотичній площині до точки контакту D між бурильною колоною і стінкою свердловини. Дану силу можна записати в базисах циліндричної системи координат:

$$\vec{f}_f = f_{fz1} \hat{e}_1 + f_{f\varphi} \hat{e}_3. \quad (32)$$

Зважаючи на те, що сила тертя спрямована протилежно до вектора відносної швидкості між тілами тертя, проєкції сил тертя можна визначити за формулами [21]:

$$f_{f\varphi} = -\frac{v_{D\varphi}}{v_D} f_f, \quad f_{fz1} = -\frac{v_{Dz1}}{v_D} f_f, \quad (33)$$

де v_D , v_{Dz1} і $v_{D\varphi}$ – числове значення повної відносної швидкості в точці контакту між бурильною колоною та стінкою свердловини та її проєкцій на базис циліндричної системи координат. Дані швидкості визначаємо, виходячи із кінематики руху елемента бурильної колон і прийнятих припущень:

$$\begin{aligned} v_{Dz1} &= \frac{du_{z1}}{dt}; \\ v_{D\varphi} &= \frac{d_w}{2} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{D_d}{2} \omega_1; \\ v_D &= \sqrt{v_{Dz1}^2 + v_{D\varphi}^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Величину зусилля тертя визначаємо відповідно до моделі тертя Стрібека:

$$f_f = \mu_d f_N + (\mu_{st} - \mu_d) f_N \exp\left(-\left(\frac{v_D}{v_s}\right)^2\right), \quad (35)$$

де v_s – швидкість Стрібека,

μ_{st} і μ_d – статичний та динамічний коефіцієнти тертя між бурильною колоною і стінкою свердловини.

Вплив промивальної рідини, що знаходиться у бурильній колоні, можна описати двома складовими:

$$\vec{f}_m = \vec{f}_{mi} + \vec{f}_{mf}, \quad (36)$$

де \vec{f}_{mf} – сила, що виникає внаслідок тертя рідини до стінки, величиною

$$\vec{f}_{mf} = -\frac{1}{8} \pi \xi d_d \rho_m v_m^2 \hat{d}_1, \quad (37)$$

\vec{f}_{mi} – сила інерції, що обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{mi} &= -\rho_m A_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_m^2 \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial s} + 2v_m \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial t} \right) = \\ &= -\rho_m A_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_m^2 \kappa_3 \hat{d}_2 + 2v_m \vec{\omega}_L \times \hat{d}_1 \right). \end{aligned}$$

Вплив промивальної рідини, що знаходиться у свердловині, описуємо у вигляді сил, які виникають внаслідок руху елемента бурильної колони у середовищі промивальної рідини. Дослідження морських трубопроводів [37; 38] показують, що в такому випадку на елемент будуть діяти сила опору \vec{f}_D та поперечна підйомна сила \vec{f}_L . Величина сили опору рухові визначається за формулою Морісона [38, 39]:

$$\vec{f}_D = -\left(\frac{1}{2} \rho_m D_d c_d |v_{C\varphi}| v_{C\varphi} + \frac{1}{4} \pi \rho D_d^2 c_m \frac{dv_{C\varphi}}{dt} \right) \hat{e}_3, \quad (38)$$

де c_d і c_m – коефіцієнт опору та інерції, $v_{C\varphi}$ – швидкість точки C в проєкції на базис \hat{e}_3 :

$$v_{C\varphi} = u_r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (39)$$

Опором рухові на інші базиси нехтуємо, через їхній незначний внесок.

Величина піднімальної сили, яка виникає внаслідок несиметричного розподілу градієнту тиску навколо елемента бурильної колони, через близькість стінки свердловини обчислюється за формулою:

$$\vec{f}_L = -\frac{1}{2} \rho_m D_d c_L v_{C\varphi}^2 \hat{e}_2, \quad (40)$$

де c_L – коефіцієнт піднімальної сили.

Вихідні дані. Чисельний розв'язок. Граничні та початкові умови

На основі запропонованої математичної моделі просторового напружено-деформованого стану бурильної колони на похилій ділянці

ці свердловини розроблено імітаційну модель в середовищі моделювання на базі мови Modelica. Середовища моделювання на базі даної мови дають змогу розв'язувати системи нелінійних диференціальних рівнянь в часі за допомогою вбудованих програмних модулів чисельними методами. Оскільки актуальна версія мови Modelica 4.0 [40] не підтримує можливість опису моделей за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними при створенні імітаційної моделі, застосовано чисельний метод ліній (Numeric Method of Lines, NMOL) [41, 42], згідно з яким усі рівняння із частковими похідними по l за допомогою центральної кінцево-різницевої схеми перетворювались у системи звичайних диференціальних рівнянь з похідними по часу.

Для розв'язку отриманої системи рівнянь до неї слід додати граничні умови та визначити початкові умови. Задача встановлення початкових умов є доволі складною та спричиняє часті помилки на етапі початкового балансування системи. Це зумовлено об'ємом математичної моделі, її чисельною складністю та вираженою нелінійністю і погано задокументованою логікою оптимізації та побудови дерева залежностей моделі програмними модулями, а отже, складністю визначення основних та похідних параметрів для моделі (для складних моделей варто задавати початкові значення тільки основним параметрам, усі інші значення будуть обчислені згідно описаної моделі системи; в іншому разі почнеться багатокрокове балансування значень початкових значень параметрів системи). Для вирішення даної проблеми застосовано описаний нижче підхід.

Приймаємо, що в початковий момент часу колона не має деформацій, перебуває на дні стінки свердловини і вільно обертається із заданою кутовою швидкістю. Вплив усіх зовнішніх силових факторів на колону описуємо як добуток їх значень на функцію $\tanh(0.5t)$, в результаті чого при імітаційному моделюванні їхня величина плавно змінюються від 0 в початковий момент часу до повного значення в момент часу 5 с і далі. Такий підхід дає змогу значно спростити визначення початкових умов, оскільки в такому разі, більшість значень початкових параметрів рівна нулю і зазвичай зникають проблеми з розбіжністю початкових значень параметрів моделі.

Граничні умови визначаються із особливості кріплення верхнього і нижнього кінців ділянки бурильної колони. Для створеної імітаційної моделі, вони були обрані наступними:

$$u_R|_{l=0} = u_R|_{l=L_D} = \frac{1}{2}(d_w - D_d); \quad (41)$$

$$\phi|_{l=0} = \phi|_{l=L_D} = 0, \quad u_z|_{l=0} = 0;$$

$$M_2|_{l=0} = M_2|_{l=L_D} = 0, \quad M_3|_{l=0} = M_3|_{l=L_D} = 0;$$

$$s|_{l=0} = 0, \quad F_1|_{l=L_D} = T_W, \quad M_1|_{l=L_D} = 0, \quad \omega_1|_{l=0} = \omega_V,$$

де ω_V і T_W – кутова швидкість та осьове зусилля у верхньому та нижньому кінцях ділянки бурильної колони відповідно.

В результаті отримано імітаційну модель, створену у мові Modelica, для дослідження зміни просторового напружено-деформованого стану бурильної колони в часі на ділянці похилої свердловини. Проведено імітаційне моделювання роботи системи, основні параметри якої зведені в таблицю 1.

Вихідні дані, що використовувались для моделювання, зведені в таблицю 1.

Отримана модель складається із 2492 рівнянь, із яких 1639 є лінійними, а 853 – нелінійні. Імітаційне моделювання виконувалось із використанням програмного модулю чисельно-го розв'язку DASSL на проміжку часу 0-20 с.

Аналіз отриманих результатів

Проведене імітаційне моделювання показує, що внаслідок деформації бурильної колони змінюються характеристики її обертання. На рис. 3 продемонстровано отримані графіки зміни кутової швидкості, кутового пришвидження та крутного моменту в окремих перерізах бурильної колони з часом. Як бачимо із графіків, в бурильній колоні виникають динамічні складові зміни кутової швидкості обертання колони та крутного моменту. Так, величина динамічної складової зміни кутової швидкості для перерізу 20 м складає 0.4%, для перерізу 60 м складає 0.2 м, а для перерізу 100 м – 0.5%. Також по довжині колони зростає абсолютне значення динамічної складової крутного моменту. Так, для перерізу з координатою 20 м воно складає 28,4 Нм, а для перерізу 60 м – 38,78 Нм.

На рисунку 4 зображено графіки зміни внутрішніх сил в окремих перерізах бурильної колони в часі. Слід зауважити, що відповідно до обраного підходу для уникнення проблеми визначення початкових умов, які описані в попередньому розділі, реальні значення зміни внутрішніх силових факторів при заданих параметрах системи слід визначати в проміжку часу від 5 с. Як бачимо із отриманих графіків, величина осової сили в поперечних перерізах бурильної колони залишається фактично незмінною, що зумовлено особливістю заданих

Таблиця 1 – Вхідні дані до експерименту

№	Опис	Позначення	Величина
1	Довжина ділянки бурильної колони	L_d	
2	Кут нахилу похилої ділянки свердловини	α	30°
3	Діаметр свердловини	d_w	444.5 мм
4	Глибина розташування похилої ділянки свердловини	h_v	1500 м
5	Зовнішній діаметр бурильної колони	D_d	127 мм
6	Внутрішній діаметр бурильної колони	d_d	108.6 мм
7	Густина матеріалу бурильної колони	ρ_d	7874 кг/м ³
8	Модуль Юнга матеріалу бурильної колони	E_d	20.7 ГПа
9	Модуль зсуву матеріалу бурильної колони	G_d	8 ГПа
10	Густина промивальної рідини	ρ_m	1400 кг/м ³
11	Швидкість промивальної рідини, що протікає бурильною колоною	v_m	3.2 м/с
12	Коефіцієнт пружності матеріалу стінки свердловини	c_w	10 МН/м
13	Коефіцієнт демпфування матеріалу стінки свердловини	μ_w	0.1 МН с/м
14	Коефіцієнт опору	c_d	1.2
15	Коефіцієнт інерції	c_m	1.9
16	Коефіцієнт підйомної сили	c_L	0.4
17	Коефіцієнт статичного тертя бурильної колони до стінки свердловини	μ_s	0.3
18	Коефіцієнт динамічного тертя бурильної колони до стінки свердловини	μ_d	0.2
19	Кутова швидкість обертання кінця бурильної колони	ω_V	6.28 рад/с
20	Осьова сила на кінці бурильної колони	T_W	20 кН
21	Кількість точок дискретизації бурильної колони по довжині		50

граничних умов, які не передбачають генерації осьових коливань.

Однак, спостерігається поява динамічних складових поперечних сил в перерізах колони, що можна пояснити особливістю її динаміки в складному деформованому стані за наявності обертання колони верхнім приводом.

Проведене імітаційне моделювання показало адекватність створеної математичної моделі, можливість її використання для дослідження різних динамічних явищ, що виникають при спорудженні похило скерованих свердловин.

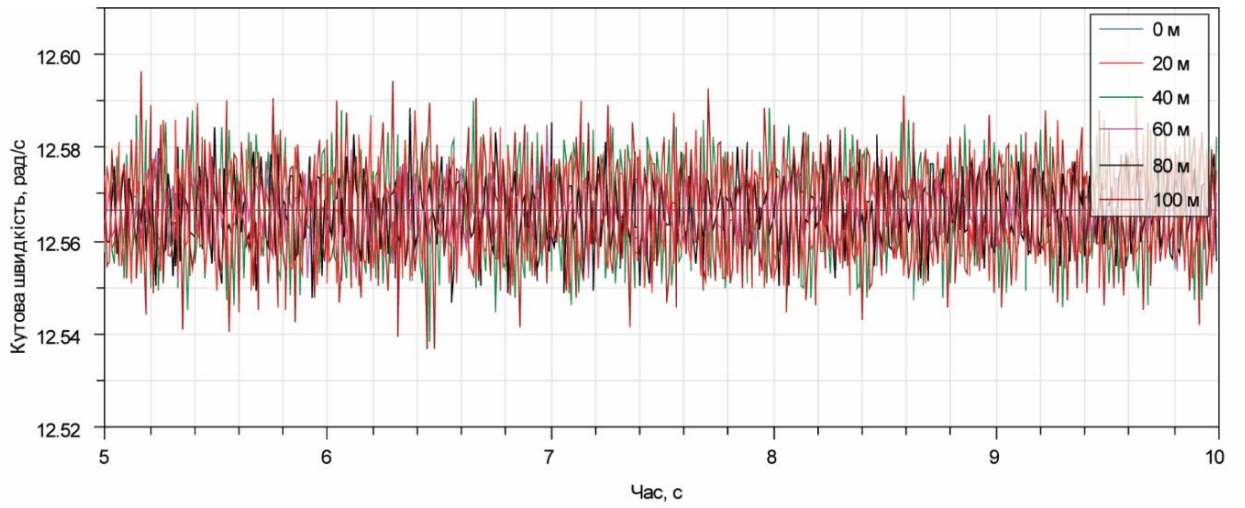
Подальші напрямки досліджень

В подальшому на основі розробленої моделі планується дослідити динаміку процесу втрати стійкості колоною під дією осьової сили та обертання колони, особливості динаміки колони за наявності збурень осьової сили та крутного моменту від процесу поглиблення вибою

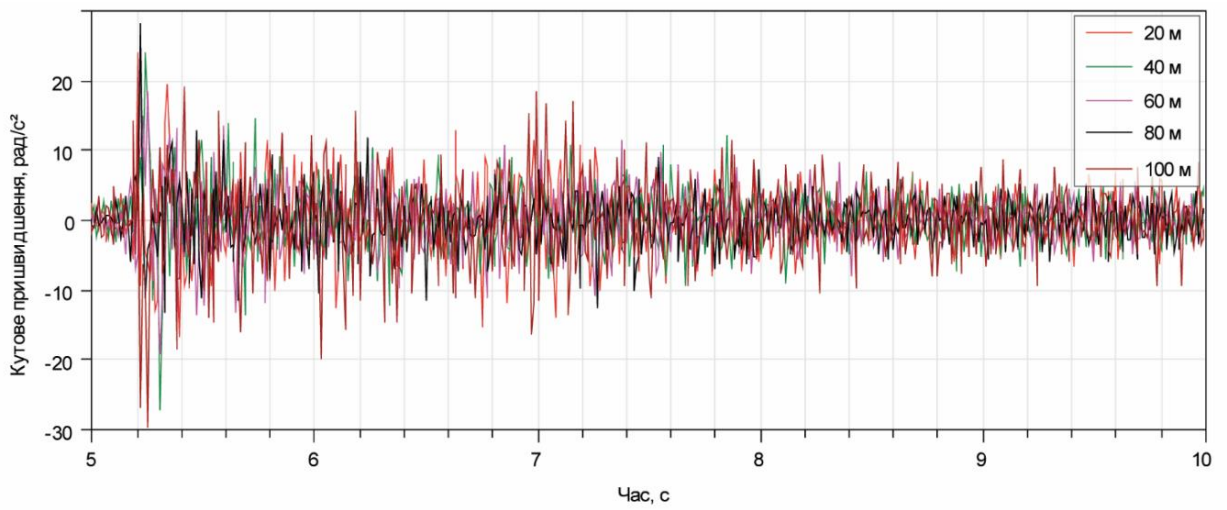
долотом та вплив різних динамічних явищ у колоні на зміну величини сил опору її рухові.

Висновки

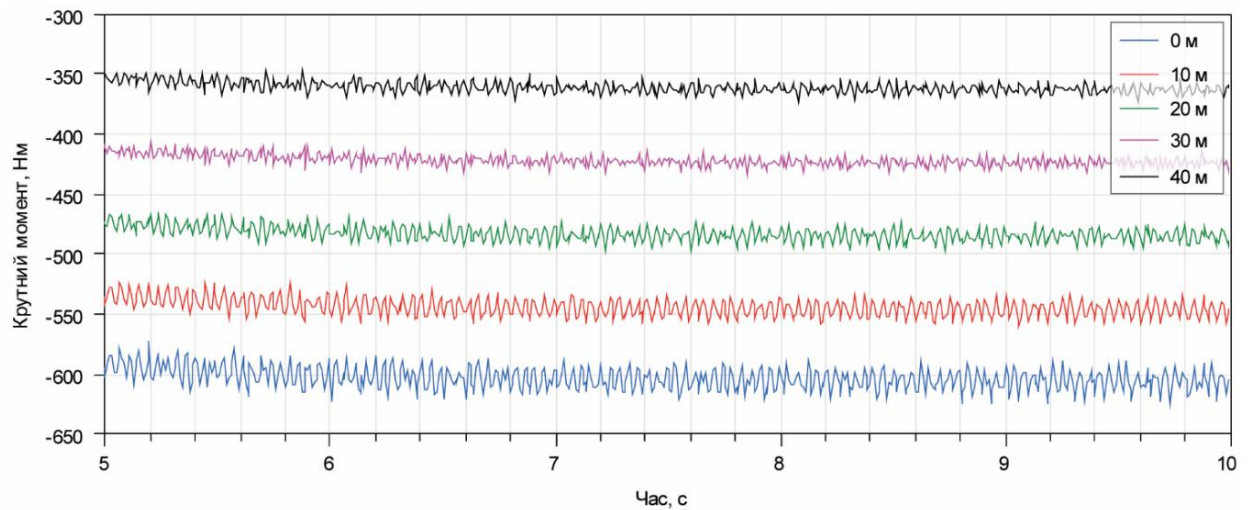
В роботі наведено математичну модель бурильної колони, що знаходиться на похилій ділянці свердловини, для дослідження зміни в часі її просторового деформованого стану. Запропонована модель базується на модифікованій моделі стрижня Кірхгофа, яка також враховує можливість осьової деформації бурильної колони. При виведенні моделі враховані основні силові фактори, що діють на бурильну колону і спричинюють її деформацію, а саме: силу ваги та виштовхувальну силу Архімеда, силу реакції з боку стінки свердловини, сили тертя бурильної колони до стінки свердловини, силові ефекти внаслідок протікання промивальної рідини бурильною колоною та заповнення нею міжтрубного простору.



а)



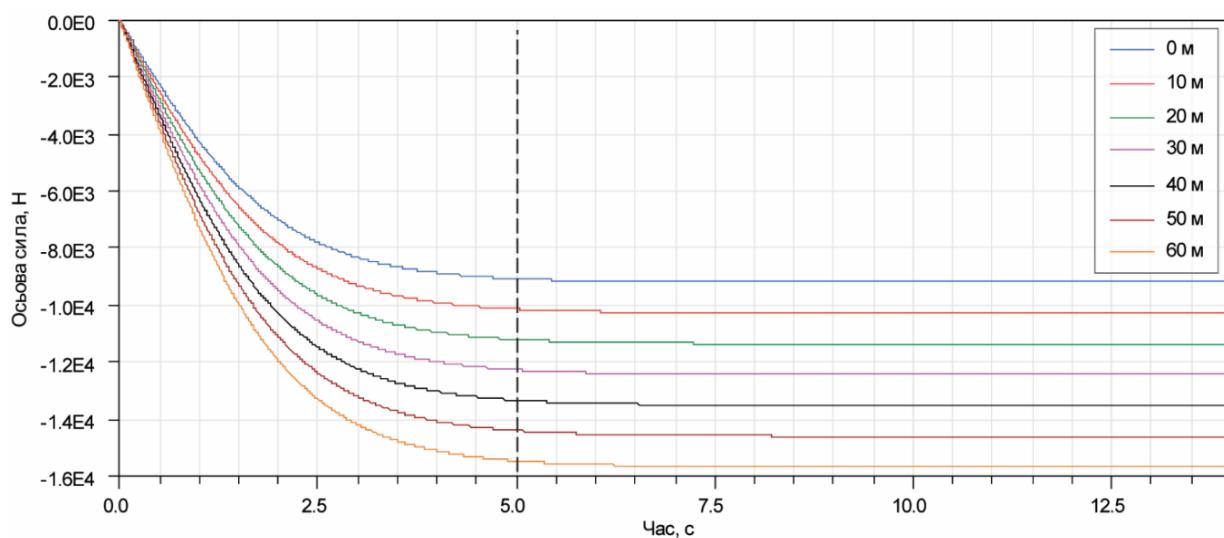
б)



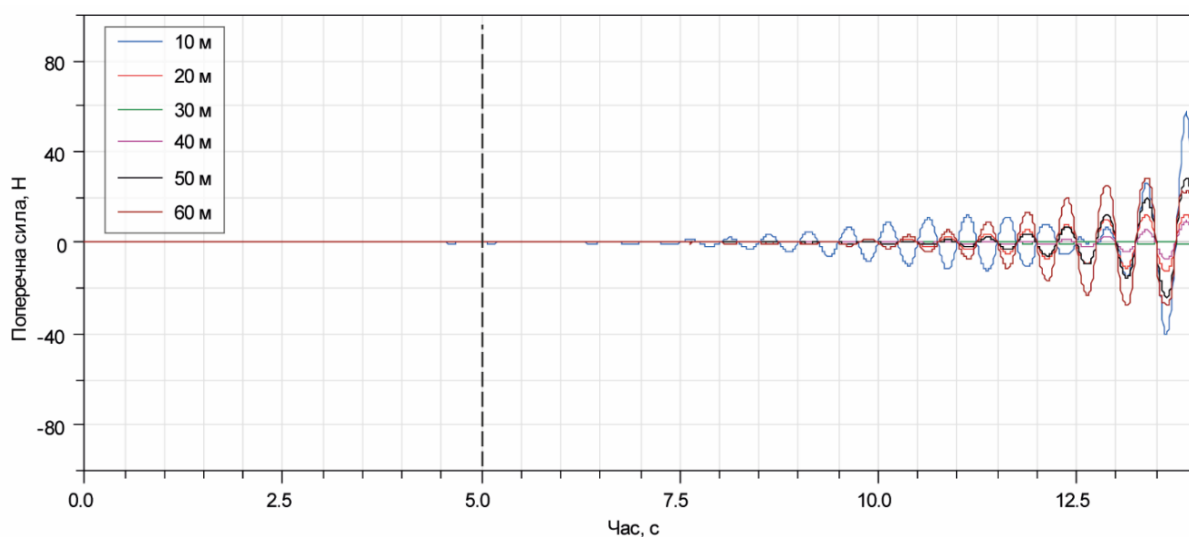
в)

а) кутова швидкість; б) кутове пришвидження; в) крутний момент

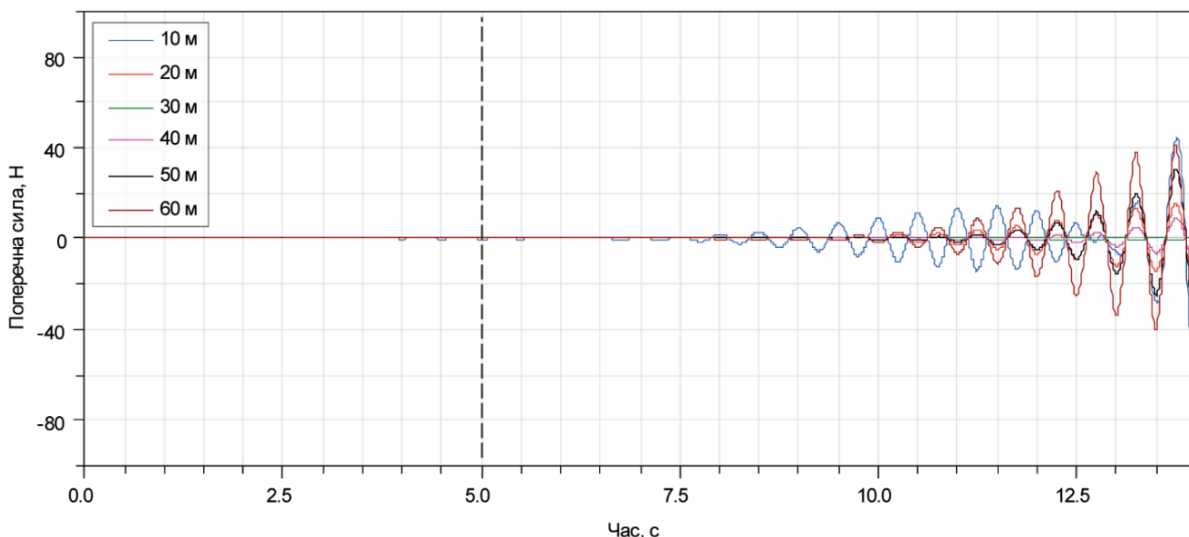
Рисунок 3 – Зміна параметрів обертання бурової колони в різних значеннях її перерізу в часі



а)



б)



в)

а) осьова сила F_1 , б) поперечна сила F_2 , в) поперечна сила F_3

Рисунок 4 – Зміна внутрішніх сил в перерізах бурильної колони з часом

На основі запропонованої математичної моделі, використовуючи чисельний метод ліній, створена програма для імітаційного моделювання роботи бурильної колони на мові моделювання Modelica. Проведене чисельне моделювання показало адекватність створеної моделі та можливість її застосування для дослідження різних динамічних явищ, що виникають в бурильній колоні у процесі буріння похило-скерованих свердловин.

Література / References

1. Fischer F. J. Analysis of Drillstrings in Curved Boreholes: *Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*, Houston, Texas, 6-9 October, 1974. DOI: [10.2118/5071-MS](https://doi.org/10.2118/5071-MS).
2. Rocheleau D. N., Dareing D. W. Effect of Drag Forces on Bit Weight in High-Curvature Well Bores. *Journal of Energy Resources Technology*. 1992. Vol. 114. No 3. P. 175–180. DOI: [10.1115/1.2905938](https://doi.org/10.1115/1.2905938).
3. Wu J., Juvkam-Wold H. C. Helical Buckling of Pipes in Extended Reach and Horizontal Wells — Part 2: Frictional Drag Analysis. *Journal of Energy Resources Technology*. 1993. Vol. 115. No 3. P. 196–201. DOI: [10.1115/1.2905993](https://doi.org/10.1115/1.2905993).
4. Wu J., Juvkam-Wold H. C., Lu R. Helical Buckling of Pipes in Extended Reach and Horizontal Wells — Part 1: Preventing Helical Buckling. *Journal of Energy Resources Technology*. 1993. Vol. 115. No 3. P. 190–195. DOI: [10.1115/1.2905992](https://doi.org/10.1115/1.2905992).
5. Payne M. L., Abbassian F. Advanced Torque-and-Drag Considerations in Extended-Reach Wells. *SPE Drilling & Completion*. 1997: Vol. 12. No 01. P. 55–62. DOI: [10.2118/35102-PA](https://doi.org/10.2118/35102-PA).
6. Ho H.-S. An Improved Modeling Program for Computing the Torque and Drag in Directional and Deep Wells. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition: SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Houston, Texas, 02 - 05 October, 1988. DOI: [10.2118/18047-MS](https://doi.org/10.2118/18047-MS).
7. Johancsik C. A., Friesen D. B., Dawson R. Torque and Drag in Directional Wells-Prediction and Measurement. *Journal of Petroleum Technology*. 1984. Vol. 36. No 06. P. 987–992. DOI: [10.2118/11380-PA](https://doi.org/10.2118/11380-PA).
8. Tikhonov V., Valiullin K., Nurgaleev A., Ring L., Gandikota R., Chaguine P., Cheatham C. Dynamic Model for Stiff String Torque and Drag. *SPE/IADC Drilling Conference: SPE Drilling and Completion*, Amsterdam, The Netherlands, 05-07 March, 2013. DOI: [10.2118/163566-MS](https://doi.org/10.2118/163566-MS).
9. Mitchell R. F., Miska S., Aadnøy B. S. Fundamentals of drilling engineering. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers, 2011. Vol. 12. SPE Textbook Series. 710 p. ISBN: 978-1-55563-338-7.
10. Mason C. J., Chen D. C.-K. Step Changes Needed To Modernize T&D Software. *SPE/IADC Drilling Conference: SPE/IADC Drilling Conference*, Amsterdam, The Netherlands, 20 - 22 February, 2007. DOI: [10.2118/104609-MS](https://doi.org/10.2118/104609-MS).
11. Musa N., Gulyayev V., Shlyun N., Aldabas H. Critical Buckling of Drill Strings in Cylindrical Cavities of Inclined Bore-Holes. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*. 2016. Vol. 6. No 1. P. 25–38. DOI: [10.17265/2159-5275/2016.01.004](https://doi.org/10.17265/2159-5275/2016.01.004).
12. Melakhessou H., Berlioz A., Ferraris G. A Nonlinear Well-Drillstring Interaction Model. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2003: Vol. 125. No 1. P. 46–52. DOI: [10.1115/1.1523071](https://doi.org/10.1115/1.1523071).
13. Tikhonov V. S., Safronov A. I. Analysis of Postbuckling Drillstring Vibrations in Rotary Drilling of Extended-Reach Wells. *Journal of Energy Resources Technology*. 2011. Vol. 133. No 4 Art. ID 043102. DOI: [10.1115/1.4005241](https://doi.org/10.1115/1.4005241).
14. Tikhonov V. S., Safronov A. I., Gelfgat M. Y. Method of Dynamic Analysis for Rod-in-Hole Buckling. *ASME 8th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis: Volume 3: Dynamic Systems and Controls, Symposium on Design and Analysis of Advanced Structures, and Tribology*, Torino, Italy, 04 - 07 July, 2006. P. 25–32. DOI: [10.1115/ESDA2006-95059](https://doi.org/10.1115/ESDA2006-95059).
15. Christoforou A. P., Yigit A. S. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol. 206. No 2. P. 243–260. DOI: [10.1006/jsvi.1997.1091](https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1091).
16. Tran Q.-T., Nguyen K.-L., Manin L., Andrianoely M.-A., Dufour R., Mahjoub M., Menand S. Nonlinear dynamics of directional drilling with fluid and borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*. 2019. Vol. 462 Art. ID 114924. DOI: [10.1016/j.jsv.2019.114924](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114924).
17. Nguyen K.-L., Tran Q.-T., Andrianoely M.-A., Manin L., Baguet S., Dufour R., Mahjoub M., Menand S. Nonlinear rotordynamics of a drillstring in curved wells: Models and numerical techniques. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 166 Art. ID 105225. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2019.105225](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105225).
18. Wang N., Cheng Z., Lu Y., Jiang W., Zhou J., He B., Ren G. A multibody dynamics model of contact between the drillstring and the wellbore and the rock penetration process. *Advances in Mechanical Engineering*. 2015. Vol. 7. No 5. P. 1-12. DOI: [10.1177/1687814015582117](https://doi.org/10.1177/1687814015582117).

19. Gulyayev V., Shlyun N. Influence of friction on buckling of a drill string in the circular channel of a bore hole. *Petroleum Science*. 2016. Vol. 13. No 4. P. 698–711. DOI: [10.1007/s12182-016-0122-5](https://doi.org/10.1007/s12182-016-0122-5).
20. Ma Y., Hong D., Cheng Z., Cao Y., Ren G. A multibody dynamic model of the drilling system with drilling fluid. *Advances in Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 8. No 7. P. 1–16. DOI: [10.1177/1687814016656703](https://doi.org/10.1177/1687814016656703).
21. Ren F., Wang B., Zhao L., Zhu A. Experimental Investigation and Analysis of Dynamic Buckling of Drill String in Horizontal Well. *Shock and Vibration*. 2017. Vol. 2017. P. 1–15. DOI: [10.1155/2017/1658435](https://doi.org/10.1155/2017/1658435).
22. Tikhonov V., Giers M., Yakhimovich V., Shemyakinsky B., Ring L. Multi-component friction testing of full-scale drill pipe specimen. *Tribology and Design 2012: Tribology and Design II: WIT Transactions on Engineering Sciences*, Kos, Greece, 03 - 05 September, 2012. P. 65–76. DOI: [10.2495/TD120061](https://doi.org/10.2495/TD120061).
23. Long Y., Wang X., Wang P., Zhang F. A Method of Reducing Friction and Improving the Penetration Rate by Safely Vibrating the Drill-String at Surface. *Processes*. 2023. Vol. 11. No 4 Art. ID 1242. DOI: [10.3390/pr11041242](https://doi.org/10.3390/pr11041242).
24. Wang X., Chen P., Rui Z., Jin F. Modeling Friction Performance of Drill String Torsional Oscillation Using Dynamic Friction Model. *Shock and Vibration*. 2017. Vol. 2017. P. 1–14. DOI: [10.1155/2017/4051541](https://doi.org/10.1155/2017/4051541).
25. Mitchell R. F. Tubing Buckling — The State of the Art. *SPE Drilling & Completion*. 2008. Vol. 23. No 04. P. 361–370. DOI: [10.2118/104267-PA](https://doi.org/10.2118/104267-PA).
26. Sparks C. P. The Influence of Tension, Pressure and Weight on Pipe and Riser Deformations and Stresses. *J. Energy Resour. Technol.* 1984. Vol. 106. P. 46–54. DOI: [10.1115/1.3231023](https://doi.org/10.1115/1.3231023).
27. Samuel R., Kumar A. Effective Force and True Force. *IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition held*, San Diego, California, USA, 6–8 March. SPE, 2012. P. 1–9. DOI: [10.2118/151407-MS](https://doi.org/10.2118/151407-MS).
28. Mitchell R. F. Forces on Curved Tubulars Caused By Fluid Flow. *SPE Production & Facilities*. 1996. Vol. 11. No 01. P. 30–34. DOI: [10.2118/25500-PA](https://doi.org/10.2118/25500-PA).
29. Li Z. Fundamental Equations for Dynamical Analysis of Rod and Pipe String in Oil and Gas Wells. *SPE Journal*. 1999. P. 1–5.
30. Sun X., Ji X., Li W., Zhang L., Song Y. Dynamic Simulation Analysis of Carbon-Steel Hybrid Sucker Rod String in Vertical and Directional Wells. *Mathematical Problems in Engineering*. 2022. Vol. 2022. P. 1–14. DOI: [10.1155/2022/5239355](https://doi.org/10.1155/2022/5239355).
31. Wang P., Ni H., Wang X., Wang R., Lu S. Research on the characteristics of earthworm-like vibration drilling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2018. Vol. 160. P. 60–71. DOI: [10.1016/j.petrol.2017.10.027](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.10.027).
32. Goicoechea H. E., Buezas F. S., Rosales M. B. A non-linear Cosserat rod model for drill-string dynamics in arbitrary borehole geometries with contact and friction. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 157–158. P. 98–110. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2019.04.023](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.04.023).
33. Mitchell R. F. Comprehensive Analysis of Buckling With Friction. *SPE Drilling & Completion*. 1996. Vol. 11. No 03. P. 178–184. DOI: [10.2118/29457-PA](https://doi.org/10.2118/29457-PA).
34. Lazarus A., Miller J. T., Reis P. M. A quaternion-based continuation method to follow the equilibria and stability of slender elastic rods, 2012. 46 p. (Preprint. DOI: [10.48550/arXiv.1212.5739](https://doi.org/10.48550/arXiv.1212.5739)).
35. Svetlitskii V. A. Stroitelnaia mekhanika mashin. Mekhanika sterzhnei. Moskva: Fizmatlit, 2009: Vol. 2: Dinamika. 384 p. ISBN: 978-5-9221-1143-0.
36. Gazzola M., Dudte L. H., McCormick A. G., Mahadevan L. Forward and inverse problems in the mechanics of soft filaments. *Royal Society open science*. 2018. Vol. 5. No 6 Art. ID 171628. DOI: [10.1098/rsos.171628](https://doi.org/10.1098/rsos.171628).
37. Sumer B. M., Fredsøe J. Hydrodynamics around cylindrical structures. Singapore. London: World Scientific Publishing, 2006. Vol. 26. Advanced series on ocean engineering. 530 p. ISBN: 9812700390.
38. Bai Y., Bai Q. Subsea pipelines and risers. Amsterdam. London: Elsevier, 2005. 841 p. ISBN: 0-080-4456-67.
39. Slabyi O. Studying the coupled axial and lateral oscillations of the drilling riser under conditions of irregular seaways. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 3. No 7 (93). P. 27–33. DOI: [10.15587/1729-4061.2018.132661](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.132661).
40. Association Modelica. Modelica - A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling, Version 3.3 Revision 1. 2014. URL: <https://modelica.org/documents/ModelicaSpec33Revision1.pdf> (дата звернення: 26.08.2017).
41. Meyer G. H. The time-discrete method of lines for options and bonds. New Jersey: World Scientific Pub, 2015. 269 p. ISBN: 978-981-4619-67-7.
42. Schiesser W. E., Griffiths G. W. A compendium of partial differential equation models. Cambridge. New York: Cambridge University Press, 2009. 474 p. ISBN: 0511576277.