

ДИНАМІЧНИЙ СКРУТ ПІДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДУ ВІД РАПТОВОГО ПОВОРОТУ ФРАГМЕНТА ОСНОВИ

М. І. Васьковський

НАК “Нафтогаз України”; 01601, м. Київ, вул. Б. Хмельницького, 6, тел. (099) 658-60-01,
e-mail: Vaskovskiy@naftogaz.com

У цій статті ми вивчаємо питання міцності підземних трубопроводів, які прокладені через території тектонічних розломів, і, як наслідок, експлуатуються в складних гірничо-геологічних умовах. На таких небезпечних ділянках окрім штатного навантаження тиском транспортованого продукту труба зазнає додаткових впливів від рухів неоднорідної, часто пошкодженої основи. Прогнозовано найбільш небезпечною виглядає ситуація, коли такі рухи є швидкоплинними. Метою роботи є розробка моделі для описання нестационарного процесу деформування трубопроводу на пошкодженій основі, спричиненого раптовим взаємним розворотом блоків довкола осі труби. Динаміку трубопроводу досліджували в лінійній постановці, моделюючи його стержнем з трубчастим поперечним перерізом. При розгляді питань граничної рівноваги долучали безмоментну теорію циліндричних оболонок та енергетичну концепцію міцності. Грунтову засипку розглядали як пружний прошарок Вінклера. Локальні порушеннями суцільності жорсткої основи описується раптовим розривом кута повороту її фрагмента. Такий підхід, відпрацьований на задачах статистики, дає можливість і в динаміці оцінювати міцність підземного трубопроводу не за зовнішнім навантаженням від ґрунту, яке зазвичай є невідомим, а за спостережуваними чи прогнозованими параметрами рухів берегів розлому. Сформулювали початково-крайову задачу для гіперболічного диференціального рівняння скруту з розривною правою частиною. На підставі аналітичного розв'язку задачі, побудованого у вигляді квадратур від функцій Бесселя, вивчено вплив раптового розвороту фрагмента основи довкола осі труби на напружено-деформований стан трубопроводу. Побудовано графіки просторово-часового розподілу кута повороту, кутової швидкості, крутної деформації та еквівалентного напруження Мізеса в передфронтівій та післяфронтівій області. Встановлено, що урахування динамічних ефектів призводить до підвищення максимумів деформації скруту та еквівалентного напруження у стінці труби порівняно з випадком статичного збурення.

Ключові слова: підземний трубопровід, динаміка, напруження, міцність, тектонічний розлом, раптовий поворот фрагмента основи.

В этой статье мы изучаем вопросы прочности подземных трубопроводов, проложенных по территории тектонических разломов, и, как следствие, эксплуатируемых в сложных горно-геологических условиях. На таких опасных участках кроме штатной нагрузки давлением транспортируемого продукта труба подвергается дополнительному влиянию движений неоднородного, часто поврежденного, основания. Прогнозируемо наиболее опасной выглядит ситуация, когда такие движения являются быстропотекающими. Целью работы является разработка модели для описания нестационарного процесса деформирования трубопровода на поврежденном основании, вызванного внезапным взаимным разворотом блоков вокруг оси трубы. Динамику трубопровода исследовали в линейной постановке, моделируя его стержнем трубчатого поперечного сечения. При рассмотрении вопросов предельного равновесия задействованы безмоментная теория цилиндрических оболочек и энергетическая концепция прочности. Грунтовую засыпку рассматривали как упругую прослойку Винклера. Локальные нарушения сплошности жесткого основания описаны внезапным разрывом угла поворота его фрагмента. Такой подход, отработанный на задачах статистики, дает возможность и в динамике оценивать прочность подземного трубопровода не за внешней нагрузкой от ґрунта, которая обычно неизвестна, а за наблюдаемыми либо прогнозируемыми параметрами движений берегов разлома. Сформулирована начально-краевая задача для гиперболического дифференциального уравнения кручения с разрывной правой частью. На основании аналитического решения задачи, построенного в виде квадратур от функций Бесселя, изучено влияние внезапного разворота фрагмента основы вокруг оси трубы на напряженно-деформированное состояние трубопровода. Построены графики пространственно-временного распределения угла поворота, угловой скорости, деформации кручения и эквивалентного напряжения Мизеса в передфронтальной и послефронтальной области. Установлено, что учет динамических эффектов приводит к повышению максимумов деформации кручения и эквивалентного напряжения в стенке трубы по сравнению с случаем статического возмущения.

Ключевые слова: подземный трубопровод, динамика, напряжения, прочность, тектонический разлом, внезапный поворот фрагмента основания.

In the paper, we study the strength of underground pipelines, which are laid through tectonic faults, and, as a consequence, are operated in difficult mining and geological conditions. In such dangerous areas, in addition to the standard pressure load of the transported product, the pipe is subjected to additional effects from the movements of the inhomogeneous, often damaged, foundation. Predictably, the most dangerous situation is when such movements are transient. The paper aims at developing a model to describe the non-stationary process of pipeline deformation on a damaged foundation caused by sudden mutual rotations of rock blocks around the pipe axis. The dynamics of the pipeline was studied in a linear formulation, modeling it with a rod with a tubular cross-section. The moment-less theory of cylindrical shells and the energy concept of strength were used while considering the issues of ultimate equilibrium. The soil backfill was considered as Winkler's elastic layer. Local continuity disturbances of the foundation are described by a sudden rupture of the angle of rotation of its fragment. This approach, developed on the problems of statics, makes it possible to dynamically assess the strength of the underground pipeline not by external load from the soil, which is usually unknown, but by the observed or predicted parameters of the fault edges. We formulated an initial-boundary value problem for a hyperbolic differential equation of torsion with a discontinuous right-hand side. Based on the analytical solution of the problem, constructed in the form of squares from Bessel functions, the influence of the sudden rotation of the foundation fragment around the pipe axis on the stress-strain state of the pipeline is studied. Plots of the space-time distribution of the angle of rotation, angular velocity, torsion deformation and equivalent stresses of von Mises in the prefrontal and postfrontal areas are constructed. It is established that considering dynamic effects leads to an increase in the torsion deformation maxima and the equivalent stress in the pipe wall in comparison with the case of static perturbation.

Keywords: underground pipeline, dynamics, stress, strength, tectonic fault, sudden rotation of the foundation fragment.

Вступ

Для обґрунтованого прогнозування безпеки транспортних систем, прокладених у гірських районах чи через території тектонічних розломів, потребують розвитку інженерні моделі та методи розрахунку напружено-деформованого стану трубопроводів у місцях локального пошкодження скельної основи. Нестандартні умови функціонування трубопроводу вимагають усебічного аналізу його поведінки із застосуванням гідрогеологічного та інженерно-геологічного моніторингу, а також реологічних моделей механіки ґрунтів та сучасних підходів механіки руйнування. Як зазначається в працях [1–4], силове навантаження на трубопровід на аномальних ділянках важко передбачити. Тому часто йдеться про оцінювання допустимих навантажень на трубопровід на порушених територіях, зокрема у працях [5–7]. Прикладами застосування числових методів для дослідження поведінки трубопроводів, що перетинають розлом, слугують статті [8–10].

Автори праць [11, 12] запропонували методику аналітичної оцінки позаштатних статичних напружень у трубопроводі за кінематичними параметрами локалізованих пошкоджень основи. Йдеться про ізольовані у просторі розриви переміщень та кутів повороту. У такий спосіб, зокрема, вивчено вплив обмеження рухомості трубопроводу, накладеного анкерним кріпленням, на напружений стан у стінці труби обабіч місця локального пошкодження основи [13]. Згадана методика дістала подальший розвиток для складніших випадків вібраційного циклічного навантаження [14] та нелінійної

взаємодії труби з блоковою основою [15]. Впливи раптових рухів блокової основи на динаміку підземних трубопроводів дотепер залишались поза увагою дослідників.

У цій статті маємо за мету розробити модель для опису нестационарного процесу деформування трубопроводу на пошкодженій основі, спричиненого раптовим взаємним розворотом блоків довкола осі труби. Задля досягнення цілі дослідження ми вирішуємо такі задачі: презентуємо ключові гіпотези моделі, формулюємо початково-крайову задачу динамічного скруту трубопроводу, будуємо аналітичний розв'язок задачі, проводимо числовий аналіз кінематики та напружено-деформованого стану труби.

Постановка початково-крайової задачі

Розглянемо прямолінійний трубопровід, який перебуває під штатним внутрішнім тиском транспортованого продукту і взаємодіє з блоковою скельною основою через шар ґрунтової засипки (рис. 1). Сумістимо вісь z з віссю труби. Нехай труба перетинає розлом основи, розташований у початку координат $z=0$. У початковий момент часу система перебуває в спокої. Згодом фрагменти пошкодженої основи обабіч розлому здійснюють рухи, які вважаються заданими. У цій статті, зокрема, досліджуємо вплив раптового повороту блоку основи довкола осі труби на нестационарну кінематику та напружено-деформований стан трубопроводу.

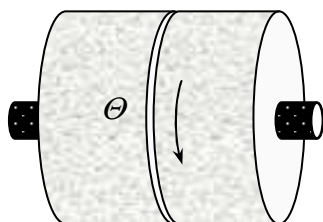


Рисунок 1 – Схема підземного трубопроводу на пошкодженій основі

Дослідження проведемо, розширивши припущення одновимірної (у просторі) моделі [11, 12] на випадок динамічного деформування. Це означає: аналіз проводимо в геометрично та фізично лінійній постановці; трубопровід моделюємо нескінченним прямолінійним стрижнем з кільцевим попереччям; блоки основи вважаємо абсолютно жорсткими; поведінку тонкого шару ґрунтової засипки описуємо традиційною гіпотезою Вінклера; кінематику взаємних поворотів задаємо, описуючи розривними функціями від осової координати; міцність трубопроводу оцінюємо, сумуючи штатні та позаштатні напруження, при цьому трубу вважаємо безмоментною оболонкою.

Згадані припущення дають змогу сформулювати початково-крайову задачу динамічного скруту нескінченного стрижня:

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} - \frac{\pi D^3 k_\tau}{4} (\varphi_z - \varphi_z^0) = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2}, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\varphi_z(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}(z, 0) = 0, \quad -\infty < z < \infty; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}(\pm\infty) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Тут прийнято позначення:

z, t – осова координата та час;

φ_z – кут закручування трубопроводу;

GJ_p – жорсткість труби щодо скруту;

ρJ_p – кінетичний момент інерції перерізу;

D – зовнішній діаметр труби;

k_τ – коефіцієнт зсувної жорсткості ґрунтового шару;

$\varphi_z^0(z, t) = \Theta H(t)H(z)$ – розривна функція розвороту основи;

Θ – величина кута раптового повороту правого блоку основи відносно нерухомого лівого;

$H(\dots)$ – функція Гевісайда.

Рівняння руху (1) [16] зручно переписати у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} - \lambda^2 (\varphi_z - \varphi_z^0) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2}, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0, \quad (4)$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi D^3 k_\tau}{4GJ_p}} \approx \sqrt{\frac{k_\tau}{Gh}} \text{ – коефіцієнт защемлення;}$$

лення;

$$c_2 = \sqrt{G/\rho} \text{ – швидкість розповсюдження хвилі зсуву;}$$

G, ρ – модуль зсуву та густина матеріалу труби;

h – товщина стінки труби.

Розв'язок

Аналітичний розв'язок неоднорідного рівняння (4) за початкових умов (2) та крайових умов (3) побудували методом інтегрального перетворення Лапласа за часом [17]. Ефективність цього методу для задач нестационарної динаміки стрижнів з нелінійними умовами на бічній поверхні продемонстровано раніше [18, 19].

Опускаючи проміжні викладки, тут наведемо кінцевий результат:

$$\varphi_z(z, t) = \Theta \left\{ (1 - \cos(\lambda c_2 t)) H(z) - \frac{\lambda^2}{2} \int_{|z|}^{c_2 t} \int_{|z|}^{c_2 \tau} J_0(\lambda(\tau - \eta)) J_0(\lambda \sqrt{\eta^2 - z^2}) d\eta d\tau \times \right. \\ \left. \times H(c_2 t - |z|) \operatorname{sgn} z \right\}, \quad (5)$$

де $J_0(t)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку [20].

Кутову швидкість повороту перерізів та крутну деформацію знайшли, диференціюючи вираз (5) відповідно за часом та за координатою

$$\omega_z(z, t) = \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}(z, t) = \Theta c_2 \left\{ \lambda \sin(\lambda c_2 t) H(z) - \frac{\lambda^2}{2} \int_{|z|}^{c_2 t} J_0(\lambda(\tau - \eta)) J_0(\lambda \sqrt{\eta^2 - z^2}) d\tau \times \right. \\ \left. \times H(c_2 t - |z|) \operatorname{sgn} z \right\}, \quad (6)$$

$$\gamma_{z\theta}(z, t) = \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}(z, t) =$$

$$= \Theta \frac{D \lambda^2}{4} \int_{|z|}^{c_2 t} J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 - z^2}) d\tau H(c_2 t - |z|). \quad (7)$$

Компоненти тензора напружень у стінці труби знаходимо із співвідношень:

$$\sigma_z = \nu p \frac{D}{2h}, \quad \sigma_\theta = p \frac{D}{2h}, \quad \tau_{z\theta} = G \gamma_{z\theta} \quad (8)$$

Тут p – внутрішній тиск у трубопроводі;

ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу труби.

Значимо, що у формулі (8) нормальні напруження викликані штатним внутрішнім тиском p , а дотичне напруження – збуренням від динамічного скруту.

Для аналізу граничного рівноваги труби використали енергетичну теорію міцності [16]:

$$\sigma_{eq} \leq [\sigma],$$

де

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{z\theta}^2} \quad (9)$$

– еквівалентне напруження Мізеса;

$[\sigma] = \sigma_T / n$ – допустиме напруження, у якому враховано коефіцієнт запасу міцності n ;

σ_T – межа плинності для матеріалу труби.

Аналіз результатів

Числові розрахунки виконали для підземного магістрального трубопроводу з такими параметрами: $D = 1420$ мм, $h = 18$ мм, $G = 8,1 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\sigma_T = 400$ МПа, а для шару ґрунтової засипки $k_\tau = 2$ МПа/м. Внутрішній тиск вважали таким, що створює у трубі тангенціальне напруження $\sigma_\theta = 300$ МПа. Кут повороту правого блоку довкола осі труби $\Theta = 0,1$ рад. $\approx 6^\circ$.

За формулами (5)–(9) побудували графіки нестационарних полів кута повороту, кутової швидкості і кутової деформації трубопроводу, а також розподілу еквівалентного напруження в стінці труби (рис. 2–5). Задля наочності усі рисунки виконано у просторовому та плоскому ракурсі.

Проведемо аналіз хвильової картини. Характеристики, задані рівнянням $c_2 t = |z|$, поділяють просторово-часову область на дві частини – передфронтону $c_2 t < |z|$ та післяфронтону $c_2 t > |z|$. До приходу збурення від місця пошкодження ліва частина трубопроводу ($z < 0$) є нерухомою, а права його частина ($z > 0$) коливається без деформації як тверде тіло подібно до гармонічного осцилятора. Після приходу збурення труба зазнає динамічного скруту як деформівне тіло; при цьому крутна деформація локалізується поблизу початку координат. З плином часу коливальний процес повільно загасає, і всі досліджувані характеристики динамічного поля наближаються до їх статичних значень, які узгоджуються з раніше отриманими розв'язками [11, 12].

Детальний аналіз даних, наведених на рис. 4, 5, показав, що найбільше значення деформації скруту, а отже й еквівалентного напруження, спостерігається в місці розлому при $t \approx 0,02$ с: $\max \gamma_{z\theta} \approx 1,9 \cdot 10^{-3}$ та

$\max \sigma_{eq} \approx 380$ МПа. Вказані величини перевищують їхні статичні аналоги [11, 12] відповідно у 1,43 та у 1,18 рази. Враховуючи прийняту тут межу плинності матеріалу, бачимо, що міцність труби забезпечується. Проте, якщо при статичному повороті блоку на 6° коефіцієнт запасу міцності становить $n_{cm} \approx 1,24$, то в разі раптового динамічного повороту запас міцності зменшується до $n_{дин} \approx 1,05$.

Висновки

Розроблена модель деформування підземного трубопроводу на пошкодженій основі дозволяє оцінити кінематику, напружено-деформований та граничний стан труби за заданими параметрами нестационарного розвороту фрагментів основи.

Досліджено хвильову картину розповсюдження збурень уздовж осі трубопроводу. Встановлено, що динамічний ефект полягає у збільшенні максимальної позаштатної деформації зсуву в 1,43 рази, а сукупного еквівалентного напруження – в 1,18 рази проти відповідних значень за статичного скруту.

Започатковані у цій статті дослідження доцільно продовжувати, враховуючи ефекти інтерференції розломів під час рухів пошкодженої основи.

Література

1. Бородавкін П. П. Подземные магистральные трубопроводы. Проектирование и строительство. М.: Недра, 1982. 384 с.
2. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. М.: Недра, 1992. 287 с.
3. Харионовский В. В. Надежность и ресурс конструкций газопроводов. М.: Недра, 2000. 467 с.
4. Мазур И. И., Иванцов О. М. Безопасность трубопроводных систем. М.: ИЦ „ЕЛИМА”, 2004. 1104 с.
5. Крижанівський Є. І., Рудко В. П., Шацький І. П. Оцінка допустимих навантажень на трубопровід у зоні сповзань ґрунту. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2004. Т. 40, № 4. С. 98–100.

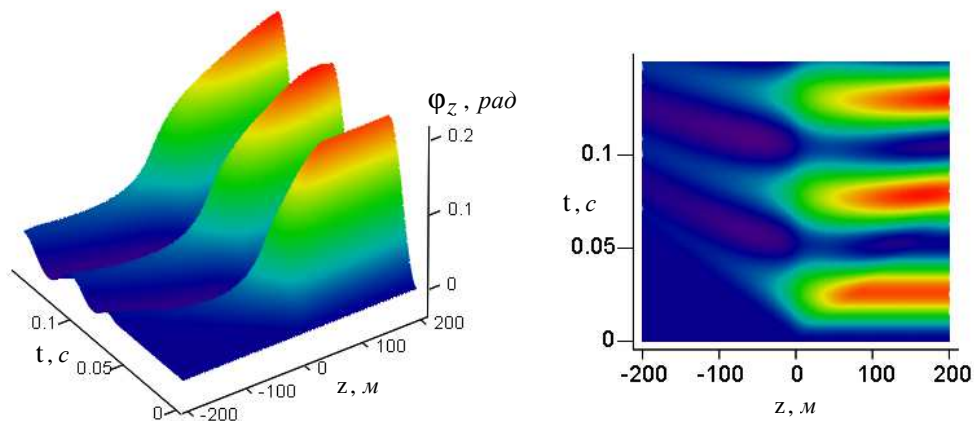


Рисунок 2 – Кут повороту перерізів труби від раптового повороту фрагмента основи

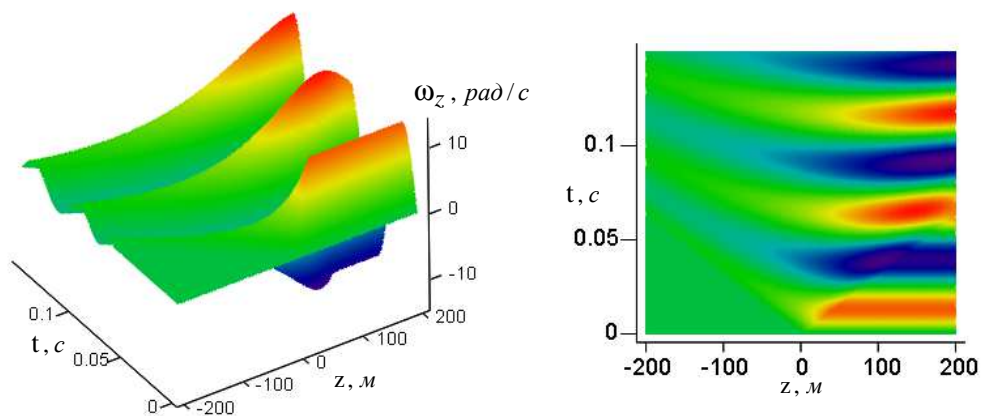


Рисунок 3 – Поле кутової швидкості перерізів труби

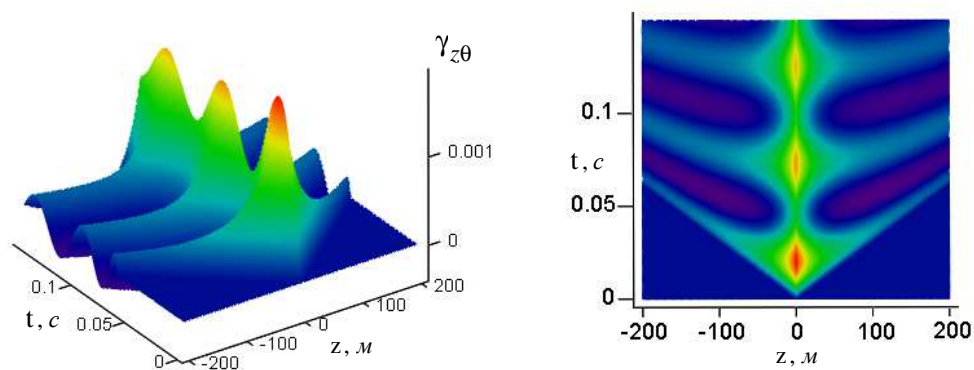


Рисунок 4 – Деформація скруту трубопроводу

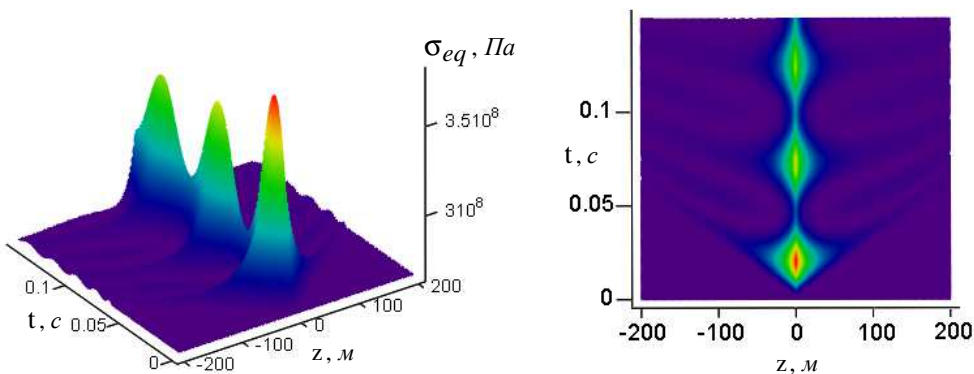


Рисунок 5 – Еквівалентні напруження у трубі від раптового повороту фрагмента основи

6. Trifonov O. V., Cherniy V. P. Elastoplastic stress-strain analysis of buried steel pipelines subjected to fault displacements with account for service loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012. Vol. 33, Issue 1. P. 54–62.

7. Velychkovych A. S., Andrusyak A. V., Pryhorovska T. O., Ropyak L. Y. Analytical model of oil pipeline overground transitions, laid in mountain areas. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*. 2019. Vol. 74, Article Number 65.

8. Орыняк И. В., Богдан А. В. Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщ. 1. Разработка численной процедуры. *Пробл. прочности*. 2007. № 3. С. 51–74.

9. Vazouras P., Karamanos S. A., Dakoulas P. Mechanical behavior of buried pipes crossing active strike-slip faults. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012. Vol. 61. P. 164–180.

10. Zhang J., Liang Z., Han C. J. Finite element analysis of wrinkling of buried pressure pipeline under strike-slip fault. *Mechanika*. 2015. Vol. 21, Issue 3. P. 31–36.

11. Шацький І. П., Струк А. Б. Напружений стан трубопроводу в зонах локального руйнування ґрунту. *Пробл. прочности*. 2009. № 5. С. 127–133.

12. Шацький І. П., Струк А. Б. Деформування підземного трубопроводу в місцях локального руйнування основи. *Доп. НАН України*. 2009. № 12. С. 69–74.

13. Струк А. Б. Напруження у підземному трубопроводі від пошкодження основи поблизу анкерного кріплення. *Нафтогазова енергетика*. 2019. № 2(32). С. 53–60.

14. Shatskyi I., Struk A., Vaskovskyi M. Static and dynamic stresses in pipeline built on damaged foundation. *Trans. VŠB – TU Ostrava, Civ. Eng. Ser.* 2017. Vol. 17, Issue 2. P. 119–124.

15. Шацький І., Струк А. Оцінювання напруженого стану підземного трубопроводу за кінематичними параметрами розтріскування основи. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В.В.Панасюка*. Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2009. С. 981–984.

16. Rabotnov Y. N. *Mechanics of deformable solids*. M.: Nauka, 1988. 712 p.

17. Debnath L., Bhatta D. *Integral transforms and their applications*. NY: CRC press, 2014. 806 p.

18. Shatskii I. P., Perepichka V. V. Shock wave propagation in an elastic rod with a viscoplastic external resistance. 2013. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* Vol. 54, issue 6. P. 1016–1020.

19. Shatskyi I., Perepichka V. Problem of dynamics for an elastic rod with decreasing function of elastic-plastic external resistance: in Awrejcewicz J. (eds). *Dynamical Systems in Applications. DSTA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer, Cham. 2018. Vol. 249. P. 335–342.

20. Abramowitz M., Stigman I. A. *Handbook of mathematical functions*. NY: Dover, 1970. 1046 p.

References

1. Borodavkin P. P. Podzemnyie magistralnyie truboprovody. *Proektirovanie i stroitelstvo*. M.: Nedra, 1982. 384 p.

2. Aynbinder A. B. Raschet magistralnyh i promyslovyh truboprovodov na prochnost i ustoychivost. *Spravochnoe posobie*. M.: Nedra, 1992. 287 p.

3. Kharionovskii V. V. Nadezhnost i resurs konstruktsiy gazoprovodov. M.: Nedra, 2000. 467 p.

4. Mazur I. I., Ivantsov O. M. Bezopasnost truboprovodnyh sistem. M.: ELIMA, 2004. 1104 p.

5. Kryzhaniv's'kyi E. I., Rudko V. P., Shats'kyi I. P. Estimation of admissible loads upon a pipeline in the zone of sliding ground. *Materials Science*. 2004. Vol. 40, Issue 4. – P. 547–551.

6. Trifonov O. V., Cherniy V. P. Elastoplastic stress-strain analysis of buried steel pipelines subjected to fault displacements with account for service loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012. Vol. 33, Issue 1. P. 54–62.

7. Velychkovych A. S., Andrusyak A. V., Pryhorovska T. O., Ropyak L. Y. Analytical model of oil pipeline overground transitions, laid in mountain areas. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*. 2019. Vol. 74, Article Number 65.

8. Orynyak I. V., Bogdan A. V. Problem of large displacements of buried pipelines. Part 1. Working out a numerical procedure. *Strength of Materials*. 2007. Vol. 39, Issue 3. P. 257–274.

9. Vazouras P., Karamanos S. A., Dakoulas P. Mechanical behavior of buried pipes crossing active strike-slip faults. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012. Vol. 61. P. 164–180.

10. Zhang J., Liang Z., Han C. J. Finite element analysis of wrinkling of buried pressure pipeline under strike-slip fault. *Mechanika*. 2015. Vol. 21, Issue 3. P. 31–36.

11. Shats'kyi I. P., Struk A. B. Stressed state of pipeline in zones of soil local fracture. *Strength of Materials*. 2009. Vol. 41, Issue 5. P. 548–553.

12. Shatskyi I. P., Struk A. B. Deformuvannia pidzemnoho truboprovodu v mistsiakh lokalnoho ruinuvannia osnovy. *Dopovid NAN Ukrainy*. 2009. No 12. P. 69–74.
13. Struk A. B. Underground pipeline stresses caused by damage near anchor mounting. *Oil and Gas Power Eng*. 2019. No 2(32). P. 53–60.
14. Shatskyi I., Struk A., Vaskovskyi M. Static and dynamic stresses in pipeline built on damaged foundation. *Trans. VŠB – TU Ostrava, Civ. Eng. Ser.* 2017. Vol. 17, Issue 2. P. 119–124.
15. Shatskyi I., Struk A. Otsiniuvannia napruzhenoho stanu pidzemnoho truboprovodu za kinematychnymy parametramy roztriskuvannia osnovy. *Mekhanika ruinuvannia materialiv i mitsnist konstruktsii / Pid zah. red. V.V.Panasiuka*. Lviv: Fiz.-mekh. in-t im. H.V.Karpenka NAN Ukrainy, 2009. P. 981–984.
16. Rabotnov Y. N. *Mechanics of deformable solids*. M.: Nauka, 1988. 712 p.
17. Debnath L., Bhatta D. *Integral transforms and their applications*. NY: CRC press, 2014. 806 p.
18. Shatskii I. P., Perepichka V. V. Shock wave propagation in an elastic rod with a viscoplastic external resistance. 2013. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* Vol. 54, issue 6. P. 1016–1020.
19. Shatskyi I., Perepichka V. Problem of dynamics for an elastic rod with decreasing function of elastic-plastic external resistance // In: Awrejcewicz J. (eds). *Dynamical Systems in Applications. DSTA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer, Cham.– 2018. Vol. 249. P. 335–342.
20. Abramowitz M., Stigan I. A. *Handbook of mathematical functions*. NY: Dover, 1970. 1046 p.