

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДУ ЯК ЕЛЕМЕНТА СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОМПРИМУВАННЯ ПРИРОДНОГО ГАЗУ

¹М.І. Горбійчук, ¹М.І. Козуляк, ²О.Б. Василенко

¹ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 504521,
e-mail: gorb@iung.edu.ua

²Науково-дослідний і проектний інститут ВАТ «Укрнафта»,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Північний бульвар, 2, тел. (0342) 776140,
e-mail: felix122@rambler.ru

Проведено дослідження динаміки газопроводу. Отримано систему диференціальних рівнянь, яка описує нестационарний потік природного газу у трубопроводі. Математична модель руху природного газу у трубопроводі, на відміну від відомих моделей, своїми постійними параметрами має лише технологічні параметри усталеного режиму і геометричні розміри трубопроводу. Наведено передавальні функції, якими характеризуються динамічні властивості трубопроводу як системи автоматичного керування.

Ключові слова: газоперекачувальний агрегат, система автоматичного керування, газопровід, динаміка газопроводу, математична модель трубопроводу, статичний режим трубопроводу, передавальна функція.

Проведены исследования динамики газопровода. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая нестационарный поток природного газа по трубопроводу. Математическая модель движения природного газа по трубопроводу, в отличие от известных моделей, своими постоянными параметрами имеет лишь технологические параметры устойчивого режима и геометрические размеры трубопровода. Приведены передаточные функции, которыми характеризуются динамические свойства трубопровода как системы автоматического управления.

Ключевые слова: газоперекачивающий агрегат, система автоматического управления, газопровод, динамика газопровода, математическая модель трубопровода, статический режим трубопровода, передаточная функция.

Investigations of dynamics of gas conduit are conducted. Differential equations system, which describes a non-stationary conventional gas current on ducting is received. Mathematical model of conventional gas flow on ducting, unlike the known designs, has the permanent characteristics only technological parameters in the withstand behaviour and geometrical gages of ducting. Transmission functions which are characterize the dynamic characteristics of ducting as an automatic control system are resulted.

Keywords: gas pumping unit, automatic control system, gas pipeline, gas pipeline dynamics, mathematical model of gas pipeline (ducting), static mode of the gas pipeline, transmission function.

За останні роки створено цілий ряд систем автоматичного керування газоперекачувальними агрегатами (САК ГПА) і автоматизованих систем керування компресорними цехами (АСК КЦ) на базі сучасної мікропроцесорної техніки. На нинішньому етапі розвитку систем керування відпрацьовано типовий перелік функцій та склад завдань САК і АСК. Системи такого типу забезпечують приймання, обробку, накопичення і представлення інформації вхідних аналогових і дискретних сигналів від давачів штатної автоматики, а також пуск, зупинку, стабілізацію режиму роботи, подання команд і сигналів для дистанційного керування виконавчими механізмами. Не зважаючи на це, актуальним залишається завдання щодо створення автоматичних оптимальних систем керування процесом компримування природного газу. Для комплексного розв'язання цієї задачі необхідно розглядати компресорну станцію як динамічну систему, що складається із паралельно з'єднаних газоперекачувальних агрегатів, до яких через прилеглий трубопровід подається природний газ під певним тиском і з певною температурою. У цій системі найінерційнішою ланкою є трубопровід.

Для отримання змістовних результатів у ході дослідження динаміки газопроводу приймемо низку припущень.

- Не враховуватимемо впливу профілю траси на характер нестационарних процесів. Автори роботи [1] вказали, що існує зведена довжина газопроводу, перевищення якої дає змогу виключити із моделі газопроводу рівняння енергії.

- Знехтуємо зміною температури вздовж траси. Неврахування зміни температури у перехідному процесі впливає на характер процесу лише під час розрахунку коротких трубопроводів. Для довгих трубопроводів вплив зміни температури на перебіг перехідного процесу несуттєвий [1].

Загальна модель переміщення газу в трубопроводі отримана на основі закону збереження кількості руху і кількості речовини [2, 3].

При зроблених припущеннях із загальної моделі ми отримаємо математичну модель трубопроводу, що матиме такий вигляд [4]:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - f_x = \rho \frac{Dw}{dt}, \quad (1)$$

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

де: P - тиск у трубопроводі, який є функцією просторової координати x і поточного часу t ;

f_x - гідравлічний опір рухові газу;

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} - \text{виражає повне у часі і}$$

просторі прискорення вибраного об'єму газу;

w - швидкість газу у вибраній точці x і у момент часу t ;

ρ - густина газу;

S - поперечний переріз труби;

m - масова витрата газу у точці x і у момент часу t .

У випадку відносно повільних перехідних процесів, коли не відбувається швидкої зміни профілю швидкостей, гідравлічний опір f_x обчислюється за формулою:

$$f_x = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{w^2}{2} \rho, \quad (3)$$

де D - діаметр трубопроводу.

У рівнянні (3) коефіцієнт λ залежить від значення числа Рейнольдса. У шорсткуватих трубах за певних значень числа Рейнольдса величина λ набуває постійного значення і у подальшому не змінюється. Такий випадок найбільш поширений в інженерній практиці.

Рівняння (1) і (2) повинні бути доповнені рівнянням стану реального газу:

$$\frac{P}{\rho} = ZRT, \quad (4)$$

де: Z - коефіцієнт стисливості газу;

R - газова стала;

T - температура газу.

Підставляючи значення f_x і $\frac{Dw}{dt}$ у рівняння (1), отримаємо:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{w^2}{2} \rho = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Розглянемо перший і другий доданки правої частини рівняння (5). Оскільки $m = \rho S w$ і

$$w = \frac{m}{\rho S}, \text{ то}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{S \rho^2} \left(\rho \frac{\partial m}{\partial t} - m \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (6)$$

Аналогічно знаходимо

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{S \rho^2} \left(\rho \frac{\partial m}{\partial x} - m \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Розглянемо стаціонарний режим роботи трубопроводу, який буде характеризуватись тиском P_0 і витратою m_0 , що лишаються незмінними з плином часу. Для такого режиму рівняння (4) набуде такого вигляду (за незмінної температури T):

$$\frac{P_0}{\rho_0} = Z_0 RT. \quad (8)$$

Із рівнянь (4) і (8) знаходимо, що

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} z, \quad (9)$$

$$\text{де } z = \frac{Z}{Z_0}.$$

Оцінимо величину z . Для цього скористаємося результатами експериментальних досліджень, які отримані на КС-3 Долинського лінійного управління магістральними газопроводами ДП «Прикарпаттрансгаз». Співвідношення тисків на вході і виході відцентрового нагнітача змінювалось у межах від 1,45 до 1,46. Значення коефіцієнтів стисливості газу Z_0 і Z обчислювалось за методикою [5]. Об'єм вибірки становив $N = 7527$ значень Z_0 і Z . Графік зміни z у часі зображений на рис. 1, із якого видно, що значення z близьке до одиниці. Було знайдено математичне сподівання

$M[z] = 1,0036$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = 2,829 \cdot 10^{-4}$. Для перевірки гіпотези H_0 про рівність $M[z] = 1$ був використаний двосторонній критерій Стюдента [6]. Для рівня значущості 0,01 було встановлено, що гіпотезу H_0 слід прийняти. Таким чином, з прийнятною для практики точністю можна вважати, що за відносно невеликих відхиленнях тиску P від його усталеного значення P_0 у рівнянні (9) можна прийняти, що $z = 1$.

За умови $z = 1$ співвідношення (9) набуде такого вигляду:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (10)$$

У рівнянні (6) ρ замінимо на $\frac{P}{P_0} \rho_0$, а у рівнянні (7) ρ замінимо на $\frac{P}{P_{10}} \rho_{10}$, як це впливає із (10). Після такої заміни значення $\frac{\partial w}{\partial t}$ і

$\frac{\partial w}{\partial x}$ підставимо у рівняння (1). В результаті отримаємо:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - f_x = \frac{1}{S \rho} \left(\left(\rho \frac{\partial m}{\partial t} - m \frac{\rho_0}{P_0} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + w \left(\rho \frac{\partial m}{\partial x} - m \frac{\rho_{10}}{P_{10}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right), \quad (11)$$

де ρ_{10} і P_{10} - густина і тиск природного газу на вході трубопроводу.

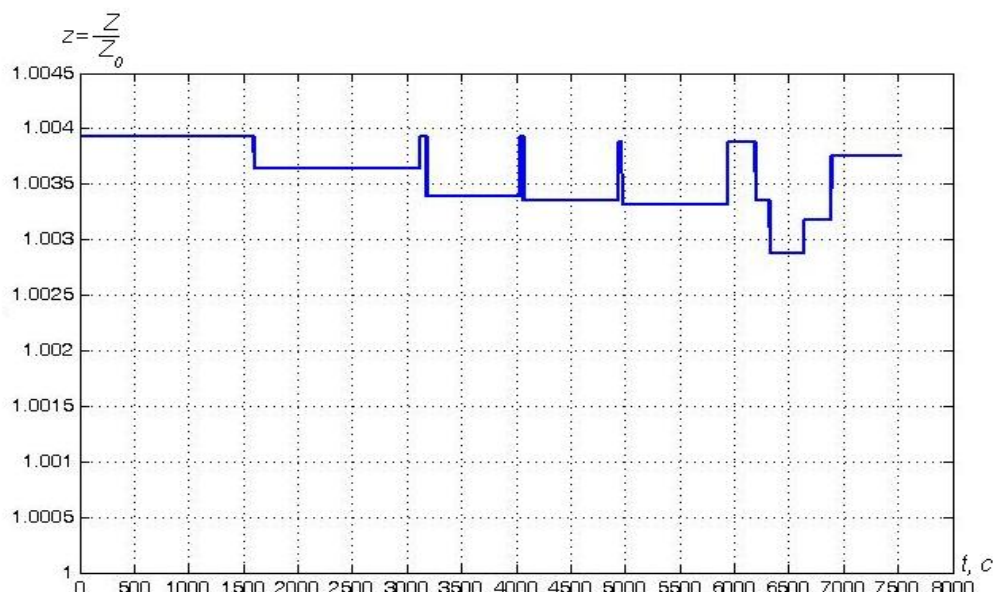


Рисунок 1 – Зміна величини z у часі

Із рівняння нерозривності (2), у якому $\rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$, знайдемо

$$\frac{\partial m}{\partial x} = -S \frac{\rho_0}{P_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (12)$$

З врахуванням значення $\frac{\partial m}{\partial x}$ і після очевидних алгебраїчних перетворень рівняння (11) набуде такого вигляду:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - f_x = \frac{1}{S} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{m}{S\rho} \cdot \frac{\rho_0}{P_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - w \frac{\rho_0}{P_0} \frac{\partial P}{\partial t} - w \frac{m}{S\rho} \cdot \frac{\rho_{10}}{P_{10}} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (13)$$

Із теорії течій відомо, що швидкість звуку у газовому середовищі визначається за формулою

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0},$$

де індекс «0» відноситься до стаціонарного потоку газу.

Із рівняння (10) випливає, що $P = P_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ і

$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P_0}{\rho_0} = c^2$. Оскільки ми нехтуємо зміною температури газу вздовж трубопроводу, то $c^2 = \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P_{10}}{\rho_{10}}$ і кінцевий вигляд рівняння (13) буде таким:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2\right) + 2 \frac{w}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - f_x = \frac{1}{S} \frac{\partial m}{\partial t}. \quad (14)$$

У ході виведення рівняння (14) був врахований той факт, що $w = \frac{m}{S\rho}$.

Таким чином, для зроблених припущень, нестационарний потік природного газу у трубопроводі описується системою диференціальних рівнянь (2) і (14) у часткових похідних.

Розглянемо статичний режим трубопроводу, коли $m_0 = const$, а P_0 залежить лише від просторової координати x . Тоді

$$-\frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{w_0}{c}\right)^2\right) - f_x^{(0)} = 0,$$

$$\text{де } f_x^{(0)} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{w_0^2}{2} \rho_0.$$

$$\text{Оскільки } w_0 = \frac{m_0}{S\rho_0}, \text{ то } f_x^{(0)} = \frac{\lambda}{2DS^2} \cdot \frac{m_0^2}{\rho_0}.$$

Введемо позначення $K_x = \frac{\lambda}{2DS^2}$. Тоді

$$f_x^{(0)} = K_x \cdot \frac{m_0^2}{\rho_0} \text{ і } -\frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{w_0}{c}\right)^2\right) - K_x \cdot \frac{m_0^2}{\rho_0} = 0. \quad (15)$$

Із рівняння (15) знаходимо

$$K_x = -\frac{\rho_0}{m_0^2} \cdot \frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{w_0}{c}\right)^2\right).$$

$$\text{З іншого боку } f_x = \frac{\lambda}{2DS^2} \cdot \frac{m^2}{\rho} = K_x \cdot \frac{m^2}{\rho}.$$

Тому

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \right) + 2 \frac{w}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - K_x \cdot \frac{m^2}{\rho} = \frac{1}{S} \frac{\partial m}{\partial t}. \quad (16)$$

Підставляючи значення K_x у (16) приходимо до висновку, що

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \right) + 2 \frac{w}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{w_0}{c} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{S} \frac{\partial m}{\partial t}$$

Оскільки $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$, то

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \right) + 2 \frac{w}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{w_0}{c} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \frac{P}{P_0} = \frac{1}{S} \frac{\partial m}{\partial t} \quad (17)$$

Зміст рівняння (17) полягає у тому, що воно справедливе і для тих випадків, коли коефіцієнт K_x , який визначається величиною гідравлічного опору λ і діаметром трубопроводу D , має різне значення у різних точках трубопроводу.

У рівнянні (15) зробимо такі заміни

$$w_0 = \frac{m_0}{S\rho_0} \text{ і } \rho_0 = \rho_{10} \frac{P_0}{P_{10}}. \text{ Тоді}$$

$$-\frac{dP_0}{dx} \left(1 - \left(\frac{c_1}{P_0} \right)^2 \right) - \frac{C}{P_0} = 0, \quad (18)$$

$$\text{де } c_1 = \frac{m_0 c}{S}; C = K_x \frac{m_0^2 P_{10}}{\rho_{10}}.$$

Диференціальне рівняння (18) розв'яжемо за таких початкових умов: при $x=0$ тиск на вході у трубопровід $P_0 = P_{10}$. Отже, маємо

$$-\frac{1}{2} (P_0^2 - P_{10}^2) + c_1^2 \ln \frac{P_0}{P_{10}} = Cx. \quad (19)$$

Із останнього рівняння вилучимо постійну C . Для цього скористаємося умовою, що при $x=L$ (L – довжина ділянки трубопроводу) $P_0 = P_{20}$. Остання умова дає підстави записати рівняння (19) у такій формі:

$$-\frac{1}{2} (P_{20}^2 - P_{10}^2) + c_1^2 \ln \frac{P_{20}}{P_{10}} = CL.$$

Звідси визначимо, що

$$C = \left(-\frac{P_{10}^2}{2} (\varepsilon^2 - 1) + c_1^2 \ln \varepsilon \right) \frac{1}{L},$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{P_{20}}{P_{10}}.$$

Підставляючи значення C у рівняння (19), отримуємо

$$\frac{1}{2} P_0^2 - c_1^2 \ln \frac{P_0}{P_{10}} = \frac{1}{2} P_{10}^2 - \left(c_1^2 \ln \varepsilon + \frac{P_{10}^2}{2} (1 - \varepsilon^2) \right) \xi \quad (20)$$

де $\xi = \frac{x}{L}$ – безрозмірна просторова координата.

Тепер продиференціюємо отриманий вираз за змінною ξ . У результаті отримаємо

$$\frac{dP_0}{d\xi} = -\frac{P_0}{P_0^2 - c_1^2} \left(c_1^2 \ln \varepsilon + \frac{P_{10}^2}{2} (1 - \varepsilon^2) \right).$$

У рівнянні (17) величину $\frac{w_0}{c}$ перетворимо

наступним чином. Оскільки $w_0 = \frac{m_0}{S\rho_0}$ і

$$\rho_0 = P_0 \frac{\rho_{10}}{P_{10}} = \frac{P_0}{c^2}, \text{ то } \frac{w_0}{c} = \frac{m_0 c}{SP_0} = \frac{c_1}{P_0}.$$

Підставляючи значення $\frac{dP_0}{d\xi}$ і $\frac{w_0}{c}$ у диференціальне рівняння (17) і після нескладних алгебраїчних перетворень, отримаємо:

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi} \left(1 - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \right) + 2 \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - \quad (21)$$

де $\tau = \frac{t}{T_x}$ – модельний час для трубопроводу

довжиною L ; $T_x = \frac{L}{c}$.

З врахуванням того, що $\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0}$,

$\partial t = T_x \partial \tau$ і $\partial x = L \partial \xi$, рівняння нерозривності (2) набуде такого вигляду:

$$\frac{S}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial m}{\partial \xi} = 0. \quad (22)$$

Рівняння (21) і (22) утворюють математичну модель руху природного газу у трубопроводі при зроблених вище припущеннях, яка, на відміну від відомих моделей, своїми постійними параметрами має лише технологічні параметри

в усталеному режимі і геометричні розміри труби. Із моделі (21) і (22) виключено параметр λ , що спрощує процес ідентифікації постійних параметрів моделі і підвищує її точність.

Вплив довгих трубопроводів на динамічні властивості контурів керування, в основному, визначається об'ємною швидкістю w і гідравлічним опором f_x [7]. Інерційність газу має значення тільки в області високих частот. Крім того, час, необхідний для проходження звукової хвилі по всій довжині газопроводу є набагато меншим постійних часу інших процесів у контурі керування. Таким чином, при синтезі і аналізі автоматичних систем керування процесом компримування природного газу можна обмежитись тільки перехідними процесами, що повільно змінюються з плином часу. Це дає підстави для нехтування у рівнянні (1) повним прискоренням $\frac{Dw}{dt}$ і модель трубопроводу записати у такому вигляді:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - f_x = 0, \quad (23)$$

$$\frac{S}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial m}{\partial \xi} = 0. \quad (24)$$

Використовуючи методику до рівняння (23), яка була використана при виведенні диференціального рівняння (21), отримаємо

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{P_{10}^2}{2P_0} (1 - \varepsilon^2) \cdot \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{P_0}{P} = 0. \quad (25)$$

Задачею автоматичної системи керування процесом компримування природного газу є забезпечення стабільності тиску на виході відцентрового нагнітача (ВЦН), але внаслідок дії зовнішніх збурень на систему будуть спостерігатись порівняно невеликі відхилення тиску від його усталеного значення P_0 . Це дає змогу лі-

неаризувати нелінійний член $\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{1}{P}$ рівняння (25)

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{1}{P} \approx \frac{1}{P_0} + 2 \frac{\Delta m}{m_0} \cdot \frac{1}{P_0} - \frac{\Delta P}{P_0^2},$$

де Δm і ΔP – відхилення величин m і P від своїх усталених значень m_0 і P_0 : $m = m_0 + \Delta m$, $P = P_0 + \Delta P$.

Отже,

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{P_0}{P} = 1 + 2 \frac{\Delta m}{m_0} - \frac{\Delta P}{P_0}.$$

Введемо безрозмірні величини масової витрати $\varphi_m = \frac{\Delta m}{m_0}$ і тиску $\varphi_p = \frac{\Delta P}{P_0}$. Тоді

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \frac{P_0}{P} = 1 + 2\varphi_m - \varphi_p. \quad (26)$$

Тепер знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial (P_0 + \Delta P)}{\partial \xi} = \frac{dP_0}{d\xi} + \frac{\partial (\Delta P)}{\partial \xi}.$$

Оскільки P_0 і ΔP є функціями змінної ξ ,

то

$$\frac{\partial (\Delta P)}{\partial \xi} = P_0 \frac{\partial \varphi_p}{\partial \xi} + \varphi_p \frac{dP_0}{d\xi}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = (1 + \varphi_p) \frac{dP_0}{d\xi} + P_0 \frac{\partial \varphi_p}{\partial \xi}. \quad (27)$$

Формулу (20) перетворимо таким чином:

$$P_0^2 \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{c_1}{P_0}\right)^2 \ln \frac{P_0}{P_{10}} \right) = \\ = P_{10}^2 \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{c_1}{P_{10}}\right)^2 \ln \varepsilon + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \right) \xi. \quad (28)$$

Оцінимо значення величин $\left(\frac{c_1}{P_0}\right)^2$ і

$\left(\frac{c_1}{P_{10}}\right)^2$, які входять до формули (28). Для цього

скористаємося даними експериментального дослідження, про яке йшлося раніше. Були отримані такі значення технологічних параметрів: $P_0 = 3,23 \cdot 10^6$ Па; $P_{10} = 4,69 \cdot 10^6$ Па; $\rho_0 = 24,7$ кг/м³; $m_0 = 158,5$ кг/с; $D = 1,4$ м. Слід зауважити, що замість P_0 взято значення P_{20} . Оскільки $P_{20} \leq P_0$, то при оцінці значення

величини $\left(\frac{c_1}{P_0}\right)^2$ отримаємо її верхню межу.

Після обчислень за відповідними формулами отримали: $c = 361,8$ м/с; $c_1 = 3,72 \cdot 10^4$ Па;

$S = 1,54$ м². Отже, $\left(\frac{c_1}{P_0}\right)^2 \leq 1,33 \cdot 10^{-4}$ і

$\left(\frac{c_1}{P_{10}}\right)^2 = 6,30 \cdot 10^{-5}$. Отримані результати дають підстави стверджувати, що доданками

$\left(\frac{c_1}{P_0}\right)^2$ і $\left(\frac{c_1}{P_{10}}\right)^2 \ln \varepsilon$ у формулі (28) можна знехтувати. Тоді

$$P_0^2 = P_{10}^2 (1 - (1 - \varepsilon^2) \xi). \quad (29)$$

Відповідно

$$\frac{dP_0}{d\xi} = -\frac{P_{10}^2}{2P_0}(1-\varepsilon^2). \quad (30)$$

Зауважимо, що такий же результат можна отримати, якщо розглянути статичний режим трубопроводу, математична модель якого система рівнянь (23) і (24).

Підставляючи значення $\left(\frac{m}{m_0}\right) \frac{P_0}{P}$ і $\frac{dP_0}{d\xi}$, які визначаються формулами (24) і (28), отримаємо

$$-\frac{\partial\varphi_p}{\partial\xi} \cdot \left(\frac{P_0}{P_{10}}\right)^2 \frac{1}{1-\varepsilon^2} + \varphi_p - \varphi_m = 0.$$

Тепер із (29) визначимо $\left(\frac{P_0}{P_{10}}\right)^2$ і його значення підставимо в останнє рівняння. У результаті будемо мати

$$-\frac{\partial\varphi_p}{\partial\xi} \cdot \frac{1-(1-\varepsilon^2)\xi}{1-\varepsilon^2} + \varphi_p - \varphi_m = 0.$$

Введемо нову змінну $\eta^2 = 1 - (1 - \varepsilon^2)\xi$. Тоді $2\eta\partial\eta = -(1 - \varepsilon^2)\partial\xi$. Звідси знаходимо, що $\partial\xi = -2\eta \frac{\partial\eta}{1 - \varepsilon^2}$. З врахуванням отриманого результату отримаємо

$$\eta \frac{\partial\varphi_p}{\partial\eta} + 2(\varphi_p - \varphi_m) = 0. \quad (31)$$

Рівняння (24) приведемо до безрозмірного вигляду. Шляхом заміни P і m на величини $P = P_0 + \Delta P = P_0(1 + \varphi_p)$ і $m = m_0(1 + \varphi_m)$.

Крім того врахуємо, що $\partial\xi = -2\eta \frac{\partial\eta}{1 - \varepsilon^2}$ і

$$\frac{P_0}{P_{10}} = \eta. \text{ Тоді отримаємо}$$

$$2\eta^2 \frac{P_{10}}{c_1} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\partial\varphi_p}{\partial\tau} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial\eta} = 0.$$

Якщо ввести змінну $\theta = \frac{\tau}{T_s}$, де $T_s = \frac{P_{10}}{c_1} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2}$, то останнє рівняння набуде такого вигляду

$$2\eta^2 \frac{\partial\varphi_p}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial\eta} = 0. \quad (32)$$

Між модельним часом θ і відповідним значенням реального часу t існує таке співвідношення:

$$t = T_0\theta, \quad (33)$$

де $T_0 = T_s T_x$.

Рівняння (32) і (33) разом з початковими

$$\varphi_p(0, \eta) = \varphi_m(0, \eta) = 0 \quad (34)$$

і граничними умовами

$$\varphi_p(\theta, \eta_1) = \varphi_{p1}, \quad \varphi_p(\theta, \eta_2) = \varphi_{p2};$$

$$\varphi_m(\theta, \eta_1) = \varphi_{m1}, \quad \varphi_m(\theta, \eta_2) = \varphi_{m2} \quad (35)$$

описують динаміку тиску і потоку природного газу довгим трубопроводом. Треба мати на увазі, що тепер координатами початку і кінця трубопроводу є $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \varepsilon$.

Точний розв'язок рівнянь (31) і (32) може бути отриманий за умови, що розподіл температур постійний вздовж трубопроводу, а поперечний переріз і коефіцієнт гідравлічного опору залишаються незмінними у будь-якому місці трубопроводу.

Знайдемо розв'язок моделі (31) і (32). Для цього перетворимо рівняння (31) і (32) за Лапласом за початкових умов (34). У результаті отримаємо систему із двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\eta \frac{d\bar{\varphi}_p}{d\eta} + 2(\bar{\varphi}_p - \bar{\varphi}_m) = 0, \quad (36)$$

$$2\eta^2 p \bar{\varphi}_p - \frac{d\bar{\varphi}_m}{d\eta} = 0, \quad (37)$$

де p – комплексний параметр перетворення Лапласа відносно модельного часу θ .

Перехід до зображення у реальному часі завжди можна здійснити, зробивши підстановку $p = T_0 s$, де s – комплексний параметр відносно реального часу t .

Із системи рівнянь вилучимо змінну φ_p . Для цього знайдемо

$$\frac{d(\eta^2 \bar{\varphi}_p)}{d\eta} = \eta \left(\eta \frac{d\bar{\varphi}_p}{d\eta} + 2\bar{\varphi}_p \right).$$

Тобто

$$\eta \frac{d\bar{\varphi}_p}{d\eta} + 2\bar{\varphi}_p = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d(\eta^2 \bar{\varphi}_p)}{d\eta}.$$

З врахуванням останнього результату рівняння (36) набуде такого вигляду:

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{d(\eta^2 \bar{\varphi}_p)}{d\eta} - 2\bar{\varphi}_m = 0.$$

Із рівняння (37) знайдемо

$$\eta^2 \bar{\varphi}_p = \frac{1}{2p} \cdot \frac{d\bar{\varphi}_m}{d\eta}. \quad (38)$$

Таким чином, маємо

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_m}{d\eta^2} - 4p\eta \bar{\varphi}_m = 0. \quad (39)$$

Отримана рівність (39) відноситься до класу нелінійних диференціальних рівнянь, які загалом мають такий вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - ax^{2b-2}y = 0. \quad (40)$$

Порівнюючи (39) і (40), бачимо, що $a = 4p$ і $b = \frac{3}{2}$.

Загальним розв'язком рівняння (39) буде [8]

$$y = \sqrt{x} (C_1 I_\nu(z) + C_2 I_{-\nu}(z)),$$

де: $I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$ – функція Беселя;

$\nu = \frac{1}{2b} = \frac{1}{3}$; $z = \sqrt{a} \frac{x^b}{b}$; $\Gamma(\nu + k + 1)$ – гамма-функція.

Для рівняння (39) аналогічний розв'язок матиме такий вигляд:

$$\bar{\varphi}_m = \sqrt{\eta} (C_1 I_\nu(z) + C_2 I_{-\nu}(z)), \quad (41)$$

де $z = \frac{4\eta^{3/2}}{3} \sqrt{p}$; C_1, C_2 – постійні інтегрування, які можна знайти за граничними умовами (35).

Оскільки між безрозмірними величинами $\bar{\varphi}_m$ і $\bar{\varphi}_p$ існує взаємозв'язок, який визначається формулою (38), для того щоб знайти $\bar{\varphi}_p$ достатньо продиференціювати функцію $\bar{\varphi}_m$ за змінною η . Для беселевих функцій справедливі такі співвідношення [9]:

$$\frac{d}{dz} (z^\nu I_\nu(z)) = z^\nu I_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz} (z^\nu I_{-\nu}(z)) = z^\nu I_{-\nu+1}(z).$$

Перетворимо вираз (41) так, щоб він вміщав добутки $z^\nu I_\nu(z)$ і $z^\nu I_{-\nu}(z)$. Отже,

$$\bar{\varphi}_m = z^{-\nu} \sqrt{\eta} (C_1 z^\nu I_\nu(z) + C_2 z^\nu I_{-\nu}(z)),$$

або з врахуванням значення z і ν

$$\bar{\varphi}_m = \left(\frac{4}{3} \sqrt{p}\right)^{-1/3} (C_1 z^\nu I_\nu(z) + C_2 z^\nu I_{-\nu}(z))$$

Після диференціювання функції $\bar{\varphi}_m$ за змінною η отримуємо

$$\frac{d\bar{\varphi}_m}{d\eta} = 2\eta \sqrt{p} (C_1 I_{\nu-1}(z) + C_2 I_{-\nu+1}(z)).$$

За відомим $\frac{d\bar{\varphi}_m}{d\eta}$, знаходимо $\bar{\varphi}_p$ (38)

$$\bar{\varphi}_p = \frac{1}{\eta \sqrt{p}} (C_1 I_{\nu-1}(z) + C_2 I_{-\nu+1}(z)). \quad (42)$$

Для знаходження постійних інтегрування C_1 і C_2 використаємо граничні умови (35). Перш ніж це зробити, необхідно вибрати вхідні

і вихідні величини для трубопроводу як елемента системи автоматичного керування. Такими величинами будуть [1] зміна тиску $\bar{\varphi}_{p1}$ на вході у трубопровід і зміна витрати $\bar{\varphi}_{m2}$ на його виході. Отже,

$$\bar{\varphi}_{p1} = \frac{1}{\eta_1 \sqrt{p}} (C_1 I_{\nu-1}(z_1) + C_2 I_{-\nu+1}(z_1)),$$

$$\bar{\varphi}_{m2} = \sqrt{\eta_2} (C_1 I_\nu(z_2) + C_2 I_{-\nu}(z_2)),$$

Де $\eta_2 = \varepsilon$, $\eta_1 = 1$; $z_1 = \frac{4}{3} \sqrt{p}$, $z_2 = \frac{4\varepsilon^{3/2}}{3} \sqrt{p}$.

Із останньої системи рівнянь знаходимо, що

$$C_1 = \frac{I_{-\nu}(z_2) \sqrt{p}}{\Delta} \bar{\varphi}_{p1} - \frac{I_{-\nu+1}(z_1)}{\Delta \sqrt{\varepsilon}} \bar{\varphi}_{m2},$$

$$C_2 = -\frac{I_\nu(z_2) \sqrt{p}}{\Delta} \bar{\varphi}_{p1} + \frac{I_{\nu-1}(z_1)}{\Delta \sqrt{\varepsilon}} \bar{\varphi}_{m2},$$

де $\Delta = I_{\nu-1}(z_1) I_{-\nu}(z_2) - I_{-\nu+1}(z_1) I_\nu(z_2)$.

Запишемо тепер рівняння (41), (42) для вихідних величин трубопроводу:

$$\bar{\varphi}_{p2} = \frac{1}{\eta_2 \sqrt{p}} (C_1 I_{\nu-1}(z_2) + C_2 I_{-\nu+1}(z_2)),$$

$$\bar{\varphi}_{m1} = \sqrt{\eta_1} (C_1 I_\nu(z_1) + C_2 I_{-\nu}(z_1)).$$

Після підстановки значень C_1 і C_2 у два останні рівняння, отримуємо

$$\bar{\varphi}_{p2} = W_{p2,p1}(p) \bar{\varphi}_{p1} + W_{p2,m2}(p) \bar{\varphi}_{m2},$$

$$\bar{\varphi}_{m1} = W_{m1,p1}(p) \bar{\varphi}_{p1} + W_{m1,m2}(p) \bar{\varphi}_{m2},$$

де:

$$W_{p2,p1}(p) = \frac{1}{\Delta \varepsilon} \times (I_{-\nu}(z_2) I_{\nu-1}(z_2) - I_\nu(z_2) I_{-\nu+1}(z_2)),$$

$$W_{p2,m2}(p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\varepsilon}} \times (I_{-\nu}(z_2) I_{\nu-1}(z_2) - I_\nu(z_2) I_{-\nu+1}(z_2)),$$

$$W_{m1,p1}(p) = \frac{\sqrt{p}}{\Delta} \times (I_\nu(z_1) I_{-\nu}(z_2) - I_{-\nu}(z_1) I_\nu(z_2)),$$

$$W_{m1,m2}(p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\varepsilon}} \times (-I_{-\nu+1}(z_1) I_\nu(z_1) + I_{\nu-1}(z_1) I_{-\nu}(z_1)).$$

Таким чином, динамічні властивості трубопроводу як елемента системи автоматичного керування характеризуються чотирма передавальними функціями.

Література

- 1 Ковалко М.П. Трубопровідний транспорт газу: монографія / М.П.Ковалко, В.Я.Грудз, В.Б.Михалків та ін. – К.: АренаЕео, 2002. – 600с.
- 2 Чарный И. А. Основы газовой динамики. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 201 с.
- 3 Оптимизационные задачи оперативного управления работой компрессорной станцией / Прилуцкий М.Х., Бухвалов И.Р., Афраймович Л.Г., Старостин Н.В., Филимонов А.В. // Исследовано в России. – 2008. – №11. – С. 375-382.
- 4 Горбійчук М.І. Моделювання об'єктів і систем керування у нафтовій та газовій промисловості: навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закладів] / М.І. Горбійчук. – Івано-Франківськ: Факел, 1999. – 603 с.
- 5 Компресорні станції. Контроль теплотехнічних та екологічних характеристик газоперекачувальних агрегатів: СОУ 60.03-30019801-011:2004. – Офіц. вид. – К.: ДК «Укртрансгаз», 2004. – 117 с.
- 6 Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау: пер. с англ. В.Д.Скаржинского. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
- 7 Чермак И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии / И.Чермак, В.Петерка, И.Заворка: пер. с чешс. Ю.Ф.Кичатова, И.В.Шварца. – М.: Мир, 1972. – 623 с.
- 8 Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камкэ. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
- 9 Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ. И.Г. Арамовича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна, Л.З. Румшинского, Л.Я.Цлафа. – М.: Наука, 1970. – 718 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії
16.11.09
Рекомендована до друку професором
Г.Н.Семенцовим*