

## СИСТЕМАТИЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ У ВИГЛЯДІ ПЕРЕДАВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Р.І. Храбатин, Л.В. Саманів, М.В. Крихівський

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 49358,  
e-mail: roman.khr@yahoo.com

Систематизовано математичні моделі, що використовуються в системах управління. З'ясовано, що одним з найбільш сприятливих та ефективних методів побудови математичних моделей систем автоматичного управління є їх побудова з використанням передавальних функцій. Для дослідження складних систем було запропоновано ввести поняття "стандартно-факторизованої форми ПФ". Передавальна функція у стандартно-факторизованій формі поєднує зручність аналізу та синтезу систем автоматичного управління. Проведена структурованість математичних моделей із зрозумілим фізичним змістом параметрів передавальних функцій є одним з ключових понять теорії керування. Такі передавальні функції можна ефективно використовувати для оцінки стійкості систем автоматичного управління.

Ключові слова: системи автоматичного управління, математичні моделі, передавальні функції, параметри.

Систематизированы математические модели, использующиеся в системах управления. Выяснено, что одним с наиболее благоприятных и эффективных методов построения математических моделей систем автоматического управления является построение с использованием передаточных функций. Для исследования сложных систем было предложено ввести понятие "стандартно-факторизованной формы ПФ". Передаточная функция стандартно-факторизованной формы объединяет удобство анализа и синтеза систем автоматического управления. Проведена структурированность математических моделей с понятным физическим смыслом параметров передаточных функций является одним из ключевых понятий теории управления. Такие передаточные функции эффективно используется при оценке устойчивости систем автоматического управления.

Ключевые слова: систем автоматического управления, математические модели, передаточные функции, параметры.

The systematization of mathematical models used in control systems has been carried out in this study. It was found out that one of the most beneficial and an effective method for constructing mathematical models of automated is such construction which uses transfer functions. For investigation complex systems it was proposed to introduce the concept of standard-factorized form. Transfer Function of standard-factorized form combines the convenience of analysis and synthesis of automatic control systems. An structuring of mathematical models with a clear physical meaning of parameters of transfer functions, one of the key concepts of control theory. This transfer function is effectively used in assessing the stability of automatic control systems.

Keywords: automatic control systems, mathematical models, transfer function, parameters.

Специфіка розв'язуваних під час аналізу і синтезу систем автоматичного управління (САУ) завдань часто пов'язана з наявністю суперечливих вимог до математичних моделей (ММ), що застосовуються при дослідженні САУ. Тому виникає необхідність у використанні різних форм запису передавальних функцій (ПФ).

Як відомо, передавальна функція є одним з ключових понять теорії керування. При управлінні у динамічних системах часто доводиться здійснювати перетворення сигналу у сигнал іншої фізичної природи. При цьому перехідна функція є диференціальним рівнянням, яким складно оперувати при розрахунках. Застосування перетворення Лапласа до перехідної функції дало змогу спростити диференціальні рівняння до алгебраїчних, а, отже, спростило аналіз динамічних особливостей об'єктів.

Математичні моделі САУ повинні відображати фізичний зміст і причинно-наслідковий зв'язок перетворення вхідних впливів у вихідні сигнали і одночасно бути зручним і дієвим засобом вирішення завдань аналізу і синтезу систем, ефективним засобом як при проекту-

ванні САУ, так і при реалізації керуючих впливів у них.

Як свідчить аналіз, для запису передавальних функцій у зображеннях за Лапласом в теорії автоматичного управління найчастіше використовуються такі три його форми:

- поліноміальна;
- факторизована;
- стандартна.

Для дослідження складних систем пропонується ввести поняття "стандартно-факторизованої форми ПФ". Для скороченого запису моделей складних нелінійних систем використовуються передавальні функції в операторній формі. Таким чином, для дослідження, аналізу та синтезу САУ на підставі вище викладеного пропонується систематизація передавальних функцій (рис. 1.)

Передавальні функції, представлені в різних формах, відображають механізм перетворення вхідного впливу у вихідну координату для однієї і тієї ж системи, а тому тотожно рівні між собою.

Передавальна функція поліноміальної форми впливає безпосередньо з математичної

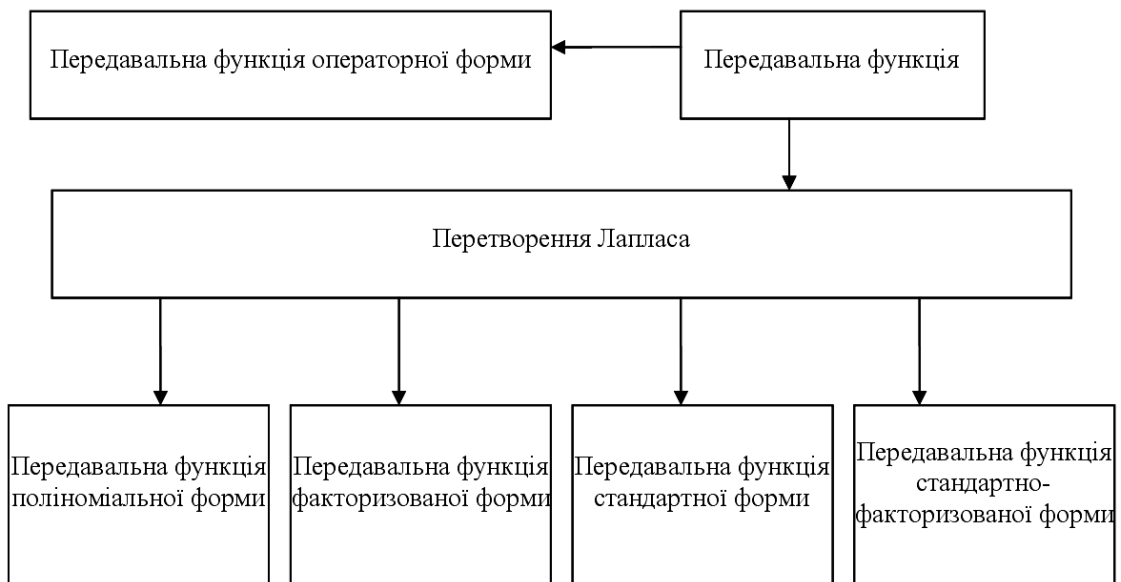


Рисунок 1 – Форми передавальних функцій

моделі САУ у вигляді диференціального рівняння (ДР) загального вигляду. Вона є дрібно-раціональною функцією, що задається у вигляді відношення поліномів канонічної форми запису

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1)$$

Ця форма ПФ ефективно використовується при оцінці стійкості САУ, перетворенні до моделей диференціальних рівнянь загального вигляду і «Вхід - стан - вихід» нормальної форми, не вимагає подання моделей у вигляді диференціальних рівнянь складних обчислень, записується рівняннями з дійсними коефіцієнтами і при комплексних коренях характеристичного рівняння.

Однак, ПФ у поліноміальної форми (1), описуючи САУ загалом, неможливо виявити структуру перетворення впливів у системі, деталізувати дослідження складних топологій систем. Коефіцієнти моделей у цій формі запису не мають ясного фізичного сенсу, а безпосередній аналітичний перехід до тимчасових характеристиках є складним і вимагає додаткових обчислень.

Передавальна функція стандартної форми - це представлення передавальної функції у вигляді добутку статичного коефіцієнта передачі і співвідношення поліномів з вільними членами, рівними одиниці.

$$W(s) = \frac{K(T_{1m}^m s^m + T_{1m-1}^{m-1} s^{m-1} + \dots + T_{11} s + 1)}{T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{n-1} + \dots + T_{11} s + 1} \quad (2)$$

Перехід до передавальної функції стандартної форми (2) уможливило отримання моделі, в якій параметри ПФ – коефіцієнти, що мають зрозумілий фізичний зміст. Статичний коефіцієнт передачі – це ступінь перетворення вхідного впливу у вихідну змінну САУ в статичному режимі, а постійна часу характеризує швидкість елементів або системи загалом мають розмірність часу.

Водночас в такій формі запису ПФ зберігається низький рівень структурованості математичної моделі САУ на окремі ланки і виникають труднощі з аналітичним обчисленням часових характеристик (знаходження зворотного перетворення Лапласа).

Розкладання поліномів чисельника і знаменника ПФ у відповідності до основної теореми алгебри (теореми Безу) на прості множники через нулі і полюси:

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 = b_m \prod_{j=1}^m (s - \gamma_j)$$

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \prod_{j=1}^n (s - s_j) \quad (3)$$

$$W(s) = \frac{k(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) \dots (s - \gamma_m)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}$$

Передавальна функція факторизованої форми (3) дає змогу представити цілісну систему сукупністю послідовно з'єднаних елементарних ланок, що мають найпростіші ПФ (рис. 2), а її розкладання на прості дроби

$$W(s) = \frac{C_1}{(s - s_1)} + \frac{C_2}{(s - s_2)} + \dots + \frac{C_n}{(s - s_n)} \quad (4)$$

призводить до подання структури САУ у вигляді паралельного з'єднання найпростіших ланок (рис. 3).

Уявлення ПФ у вигляді послідовного або паралельного з'єднання найпростіших елементарних ланок часто спрощує аналіз і синтез САУ. Зворотне перетворення Лапласа від простих дроби має табличну форму, що дозволяє легко знаходити тимчасові характеристики САУ будь-якої складності. Крім того, ця форма запису ПФ забезпечує перехід до ММ в просторі станів канонічної форми з діагональною матрицею стану з усіма перевагами, що впливають з цього (незалежність змінних станів один

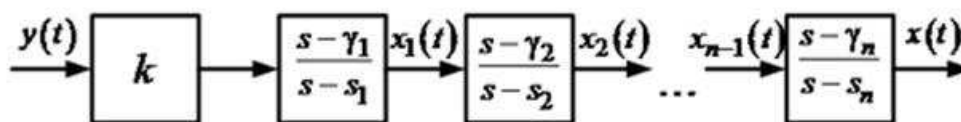


Рисунок 2 – Послідовна структура ПФ факторизованої форми

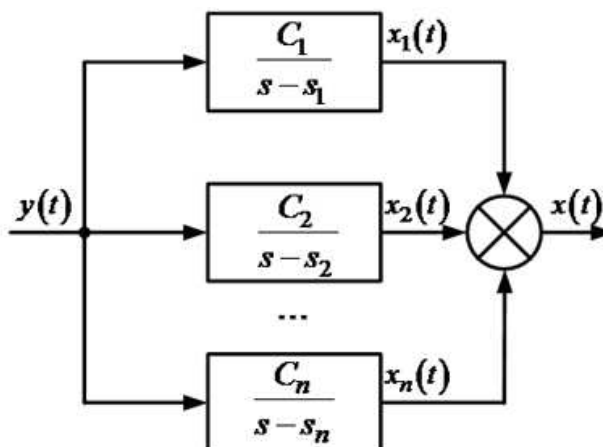


Рисунок 3 – Паралельна структура ПФ факторизованої форми

від одного, простота звернення матриці, зручність розв'язку задач аналізу та синтезу).

Хоча перехід до ПФ канонічної форми і пов'язаний з обчисленнями, однак параметри ПФ канонічної форми є більш інформативними щодо властивостей системи. Дійсно, за значенням полюсів передавальної функції можна не тільки судити про необхідні умови стійкості лінійних систем, а й визначати достатні умови стійкості систем загалом, повною мірою відображати властивості САУ, а й порівняно просто визначати характер перехідних процесів у системі.

Попри те параметри ПФ в канонічній формі не повною мірою відображають фізичний сенс. Коефіцієнт пропорційності тут не має ніякого фізичного сенсу.

Поєднання переваг стандартної і канонічної форм запису ПФ досягається поданням передавальних функцій у стандартно-факторизованої формі

$$W(s) = \frac{K(T_{11}s + 1)(T_{12}s + 1) \dots (T_{1m}s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \dots (T_ns + 1)} \quad (5)$$

Передавальна функція стандартно-факторизованої форми (5) поєднує зручність аналізу та синтезу САУ, структурованість їх ММ із зрозумілим фізичним змістом параметрів ПФ (статичний коефіцієнт передачі відображає ступінь перетворення вхідного впливу у вихідну змінну САУ в статичному режимі, а постійні часу характеризують швидкість або час протікання перехідних процесів в окремих елементах системи).

### Література

- 1 Воронова А.А. Теорія автоматичного управління: підручник. у 2-х частинах; під ред. А.А.Воронова. – М.: Вищ. шк., 1986. – Ч.1. – 367 с. – Ч.2. – 504 с.
- 2 Баранов В.Я. Промислові прилади і засоби автоматизації: довідник / В.Я.Баранов, Т.Х.Безновська, В.А.Бек та ін.; під ред. В.В.Черенкова. – Л.: Машинобудування. – 847 с.
- 3 Іванов А.О. Теорія автоматичного керування: Підручник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2003. – 250 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії  
18.03.11

Рекомендована до друку професором  
**В. М. Юрчишиним**